И. В. САВЕЛЬЕВ

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ 2

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание пятое, исправленное



• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
• МОСКВА •
• КРАСНОДАР •
2021

ББК 22.3я73
С 12

Савельев И. В.

С 12 Курс общей физики. В 5 тт. Т. 2. Электричество и магнетизм: Учебное пособие. 5-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2021. — 352 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1206-8 (общий)
ISBN 978-5-8114-1208-2 (том 2)

Пятитомный курс общей физики, созданный И. В. Савельевым на базе лекций, которые он читал в Московском инженерно-физическом институте, знакомит студентов с основными идеями и методами физики.

Второй том включает материал, посвященный электричеству и магнетизму.

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по техническим направлениям и специальностям.

ББК 22.3я73

Координатор проекта
профессор *Н. М. КОЖЕВНИКОВ* (СПбГПУ)

Обложка
Л. А. АРНДТ

Оглавление

Предисловие

Предлагаемый вниманию читателей «Курс общей физики» широко известного автора И.В. Савельева предназначен для студентов и преподавателей высших учебных заведений. Данный курс охватывает все разделы современной физики и выпускается в пяти книгах: книга 1 «Механика», книга 2 «Электричество и магнетизм», книга 3 «Молекулярная физика и термодинамика», книга 4 «Волны. Оптика», книга 5 «Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц».

Настоящий вариант курса за последние 20 лет выдержал множество изданий. По своему подходу к изложению материала он существенно отличается от прежнего трехтомника.

Содержание второй книги «Курса общей физики» составляет учение об электромагнетизме.

Настоящий курс предназначен в первую очередь для втузов с расширенной программой по физике. Однако изложение построено так, что этот курс можно использовать в качестве учебного пособия для втузов с обычной программой.

В «Методических рекомендациях», помещенных перед основным текстом, наряду с другим материалом приведен ориентировочный перечень сокращений в тексте, которые можно сделать в случае недостатка времени для изучения полного объема курса.

Методические рекомендации

В настоящих рекомендациях даны разъяснения по поводу тех вопросов, которые не всегда излагаются правильно. Кроме того, приводится ориентировочный перечень параграфов либо их частей, рассмотрение которых не обязательно в случае нехватки времени на изучение Курса в полном объеме. Этот перечень отражает личную точку зрения автора и носит лишь рекомендательный характер.

1. Не следует, как это делается в некоторых книгах, называть электрическую ε_0 и магнитную μ_0 постоянные «проницаемостями вакуума». Такие названия являются физически бессмысленными. Соответственно не следует рассматривать лишенные физического смысла «абсолютные проницаемости» $\varepsilon_a = \varepsilon\varepsilon_0$ и $\mu_a = \mu\mu_0$.

2. В тех случаях, когда электрическая и магнитная постоянные встречаются в комбинации $\varepsilon_0\mu_0$, целесообразно заменять это произведение через $1/c^2$, где c — электродинамическая постоянная, совпадающая со скоростью света в вакууме (см. формулу (6.15)).

3. Полезно иметь в виду, что ε_0 и μ_0 входят в формулы в комбинации с множителем 4π, причем $1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$, а $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$. Поэтому нецелесообразно иметь дело с числовыми значениями $\varepsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11}$Ф/м и $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$Гн/м. Лучше пользоваться значениями постоянных, выраженными через π, а именно: $\varepsilon_0 = 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)$ и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$.

4. Не надо жалеть времени на усвоение основных понятий и соотношений векторного анализа (§ 1.11). Затраченное время с лихвой окупится за счет более простого и изящного получения ряда результатов. Кроме того, подлинное понимание природы и свойств электромагнитного поля без использования понятий дивергенции и ротора недостижимо.

5. Нередко встречаются утверждения, будто электрическое смещение $\mathbf{D}$ (или напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$) является характеристикой электрического (магнитного) поля, не зависящей от свойств среды, т. е. что $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$, где $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{H}_0$ — значения величин в отсутствие среды, а $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ — значения тех же величин в среде. Соответственно относительные проницаемости среды определяются в виде $\varepsilon = E_0/E$ и $\mu = B/B_0$. Надо иметь в виду, что такие утверждения являются неверными. Соотношения же $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0/\varepsilon$ и $\mathbf{B} = \mu\mathbf{B}_0$ оказываются справедливыми лишь при весьма специфических условиях, которые для электрического поля определены на с. 91, а для магнитного поля — на с. 191.

Неправильность в общем случае равенства $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0$ вытекает, в частности, из рис. 2.7. Чтобы убедиться в неправильности в общем случае соотношения $\mu = B/B_0$, рассмотрим большую тонкую пластинку из однородного и изотропного ферромагнетика, расположенную перпендикулярно к линиям $\mathbf{B}$ внешнего магнитного поля. В этом случае $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$, а μ может достигать значений порядка 10^5.

6. Величины $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ надо трактовать как вспомогательные характеристики электромагнитного поля (основными являются $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$), определяемые формулами (2.18) и (7.8). Величина $\mathbf{D}$ оказывается полезной, потому что ее дивергенция определяется плотностью только сторонних зарядов, величина $\mathbf{H}$ — потому что ее ротор определяется плотностью только макроскопических токов (см. формулы (2.23) и (7.9)).

7. В § 2.4 вывод формулы (2.12) для объемной плотности связанных зарядов можно опустить, а саму формулу дать без вывода.

8. При нехватке времени § 6.7 «Магнитное взаимодействие как релятивистский эффект» можно исключить.

9. Выкладки в § 7.7 и § 7.8 можно опустить, ограничившись качественным рассмотрением диа- и парамагнетизма.

10. В § 10.5 расчет поля для бетатрона (формулы (10.32)–(10.37)) можно опустить.

11. Главу 12 «Электрический ток в газах» в сокращенный вариант программы можно не включать.

Подчеркнем, что приведенный перечень сокращений является ориентировочным. В зависимости от обстоятельств он может быть изменен или дополнен по усмотрению преподавателя.

Глава 1

Электрическое поле в вакууме

1.1. Электрический заряд

Все тела в природе способны электризоваться, т. е. приобретать электрический заряд. Наличие электрического заряда проявляется в том, что заряженное тело взаимодействует с другими заряженными телами. Имеются два вида электрических зарядов, условно называемых положительными и отрицательными. Заряды одного знака отталкиваются, разных знаков — притягиваются друг другом.

Электрический заряд является неотъемлемым свойством некоторых элементарных частиц[1]). Заряд почти всех элементарных частиц (если он не равен нулю) одинаков по абсолютной величине[2]) и представляет собой наименьший встречающийся в природе электрический заряд, называемый элементарным зарядом. Положительный элементарный заряд мы будем обозначать символом $+e$, отрицательный — символом $-e$.

К числу элементарных частиц принадлежат, в частности, электрон (несущий отрицательный заряд $-e$), протон (несущий положительный заряд $+e$) и нейтрон (заряд которого равен нулю). Из этих частиц построены атомы и молекулы любого вещества, поэтому электрические заряды входят в состав всех тел. Обычно частицы, несущие заряды разных знаков, присутствуют в равных количествах и распределены в теле с одинаковой плотностью. В этом случае алгебраическая сумма зарядов в любом элементарном объеме тела равна нулю, и каждый такой объем (и тело в целом) будет нейтральным. Если каким-либо образом создать в теле избыток частиц одного знака (со-

---

[1]) Элементарными частицами называются мельчайшие известные в настоящее время частицы материи.

[2]) Некоторые частицы, называемые резонансами, имеют заряд, кратный e, например $2e$.

ответственно недостаток частиц другого знака), тело окажется заряженным. Можно также, не изменяя общего количества положительных и отрицательных частиц, вызвать их перераспределение в теле таким образом, что в одной части тела возникает избыток зарядов одного знака, в другой — другого. Это можно осуществить, приблизив к незаряженному металлическому телу другое, заряженное тело.

Поскольку всякий заряд q образуется совокупностью элементарных зарядов, он является целым кратным e:

$$q = \pm Ne. \tag{1.1}$$

Однако элементарный заряд настолько мал, что возможную величину макроскопических зарядов можно считать изменяющейся непрерывно.

Если физическая величина может принимать только определенные дискретные значения, говорят, что эта величина квантуется. Факт, выражаемый формулой (1.1), означает, что электрический заряд квантуется.

Величина заряда, измеряемая в различных инерциальных системах отсчета, оказывается одинаковой. Следовательно, электрический заряд является релятивистски инвариантным. Отсюда вытекает, что величина заряда не зависит от того, движется этот заряд или покоится.

Электрические заряды могут исчезать и возникать вновь. Однако всегда возникают или исчезают два элементарных заряда противоположных знаков. Например, электрон и позитрон (положительный электрон) при встрече аннигилируют, т. е. превращаются в нейтральные гамма-фотоны. При этом исчезают заряды $-e$ и $+e$. В ходе процесса, называемого рождением пары, гамма-фотон, попадая в поле атомного ядра, превращается в пару частиц — электрон и позитрон. При этом возникают заряды $-e$ и $+e$.

Таким образом, *суммарный заряд электрически изолированной системы не может изменяться*[3]. Это утверждение носит название закона сохранения электрического заряда.

Отметим, что закон сохранения электрического заряда тесно связан с релятивистской инвариантностью заряда.

---

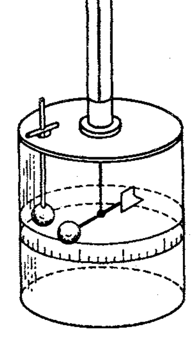
[3]) Система называется электрически изолированной, если через ограничивающую ее поверхность не могут проникать заряженные частицы.

Действительно, если бы величина заряда зависела от его скорости, то приведя в движение заряды одного какого-то знака, мы изменили бы суммарный заряд изолированной системы.

1.2. Закон Кулона

Закон, которому подчиняется сила взаимодействия точечных зарядов, был установлен экспериментально в 1785 г. Кулоном[4]). Точечным зарядом называется заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями от этого тела до других тел, несущих электрический заряд.

С помощью крутильных весов (рис. 1.1), сходных с теми, которые были использованы Кавендишем для определения гравитационной постоянной (см. § 7.1 кн. 1), Кулон измерял силу взаимодействия двух заряженных шариков в зависимости от величины зарядов на них и от расстояния между ними. При этом Кулон исходил из того, что при касании к заряженному металлическому шарику точно такого же незаряженного шарика заряд распределяется между обоими шариками поровну.


Рис. 1.1

В результате своих опытов Кулон пришел к выводу, что *сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов прямо пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.* Направление силы совпадает с соединяющей заряды прямой.

Отметим, что направление силы взаимодействия вдоль прямой, соединяющей точечные заряды, вытекает из соображений симметрии. Из опыта следует, что пространство однородно и изотропно. Следовательно, единственным направлением, выделяемым в пространстве внесенными в него неподвижными точечными зарядами, является направление от одного заряда к другому. Допустим, что сила $\mathbf{F}$, действующая на заряд q_1 (рис. 1.2), образует с направлением $q_1\ q_2$ угол α,

---

[4]) Шарль Огюстен Кулон (1736–1806) — французский физик и военный инженер.

отличный от нуля или π. Но при осевой симметрии нет никаких оснований выделить силу $\mathbf{F}$ из множества сил других направлений, образующих с осью q_1q_2 такой же угол α (направления этих сил образуют конус с углом раствора 2α). Возникающее вследствие этого затруднение исчезает

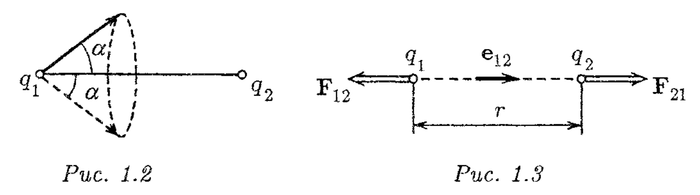


Рис. 1.2 *Рис. 1.3*

при α, равном нулю или π. Закон Кулона может быть выражен формулой

$$\mathbf{F}_{12} = -k\frac{q_1q_2}{r^2}\mathbf{e}_{12}. \tag{1.2}$$

Здесь k — коэффициент пропорциональности, который предполагается положительным; q_1 и q_2 — величины взаимодействующих зарядов; r — расстояние между зарядами; $\mathbf{e}_{12}$ — единичный вектор, имеющий направление от заряда q_1 к заряду q_2; $\mathbf{F}_{12}$ — сила, действующая на заряд q_1 (рис. 1.3; рисунок соответствует случаю одноименных зарядов). Сила $\mathbf{F}_{21}$ отличается от $\mathbf{F}_{12}$ знаком:

$$\mathbf{F}_{21} = k\frac{q_1q_2}{r^2}\mathbf{e}_{12}. \tag{1.3}$$

Одинаковый для обоих зарядов модуль силы взаимодействия можно представить в виде

$$F = k\frac{|q_1q_2|}{r^2}. \tag{1.4}$$

Опыт показывает, что сила взаимодействия двух данных зарядов не изменяется, если вблизи них поместить еще какие-либо заряды. Пусть имеются заряд q_a и, кроме того, N зарядов $q_1, q_2, ..., q_N$. Из сказанного выше вытекает, что результирующая сила $\mathbf{F}$, с которой действуют на q_a все N зарядов q_i, определяется формулой

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_{ai}, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{F}_{ai}$ — сила, с которой действует на q_a заряд q_i в отсутствие остальных $N-1$ зарядов.

Факт, выражаемый формулой (1.5), позволяет, зная закон взаимодействия между точечными зарядами, вычислить силу взаимодействия между зарядами, сосредоточенными на телах конечных размеров. Для этого нужно разбить каждый из зарядов на столь малые заряды dq, чтобы их можно было считать точечными, вычислить по формуле (1.2) силу взаимодействия между зарядами dq, взятыми попарно, и затем произвести векторное сложение этих сил. Математически эта операция полностью совпадает с вычислением силы гравитационного притяжения между телами конечных размеров (см. § 7.1 кн. 1).

1.3. Системы единиц

Надлежащим выбором единицы заряда (единицы для F и r были установлены в механике) можно добиться того, чтобы коэффициент пропорциональности в формуле (1.2) оказался равным единице. Соответствующая единица заряда (F и r предполагаются измеренными в единицах СГС-системы) называется абсолютной электростатической единицей заряда (сокращенно: СГСЭ-единицей заряда). Она представляет собой такой заряд, который взаимодействует в вакууме с равным ему и находящимся на расстоянии 1 см зарядом с силой в 1 дину.

Посредством тщательных измерений (они будут описаны в § 10.3) было найдено, что элементарный заряд равен

$$e = 4,80 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ-ед. заряда.} \qquad (1.6)$$

Приняв единицы длины, массы, времени и заряда за основные, можно построить систему единиц электрических и магнитных величин. Система, в основе которой лежат сантиметр, грамм, секунда и СГСЭ-единица заряда, называется абсолютной электростатической системой единиц (СГСЭ-системой). В основе этой системы лежит закон Кулона, т. е. закон взаимодействия между покоящимися зарядами. Впоследствии мы познакомимся с абсолютной электромагнитной системой единиц (СГСМ-системой), в основе которой лежит закон взаимодействия между проводниками, по которым течет электрический ток. Абсолютной является также гауссова система, в которой единицы электри-

ческих величин совпадают с единицами СГСЭ-системы, а магнитных величин — с единицами СГСМ-системы.

В системе СГСЭ формула (1.4) имеет вид

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \tag{1.7}$$

Эта формула справедлива в том случае, если заряды находятся в вакууме. Для зарядов, помещенных в некоторую среду, она должна быть уточнена (см. § 2.8).

С 1 января 1982 г. в нашей стране был введен в действие Государственный стандарт ГОСТ 8.417–81, которым предписывается обязательное применение Международной системы единиц, обозначаемой символом СИ. Основными единицами этой системы являются метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин, кандела и моль. Единицей силы в СИ служит ньютон (Н), равный 10^5 дин.

При установлении единиц электрических и магнитных величин СИ, как и СГСМ-система, исходит из закона взаимодействия не зарядов, а проводников с током. Поэтому коэффициент пропорциональности в формуле закона Кулона оказывается отличной от единицы размерной величиной.

Единицей заряда в СИ является к у л о н (Кл). Опытным путем установлено, что

$$1\ \text{Кл} = 2{,}998 \cdot 10^9\ (\text{приближенно } 3 \cdot 10^9)\ \text{СГСЭ-ед. заряда.} \tag{1.8}$$

Чтобы составить представление о заряде в 1 Кл, вычислим силу, с которой взаимодействовали бы два точечных заряда величиной 1 Кл каждый, находящихся на расстоянии 1 м друг от друга. В соответствии с (1.7)

$$F = \frac{3 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^9}{100^2}\ \text{СГСЭ-ед.} = 9 \cdot 10^{14}\ \text{дин} = 9 \cdot 10^9\ \text{Н}. \tag{1.9}$$

Элементарный заряд, выраженный в кулонах, равен

$$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}. \tag{1.10}$$

1.4. Рационализованная запись формул

Во многие формулы электродинамики, если записывать их в системе СГС (в частности, в гауссовой), входят множителями 4π и так называемая электродинамическая

постоянная c, равная скорости света в вакууме. Для того чтобы избавиться от них в практически наиболее важных формулах, коэффициент пропорциональности в законе Кулона полагают равным

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Тогда выражение закона для зарядов, помещенных в вакуум, принимает вид

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \tag{1.11}$$

Соответственно изменяются и другие формулы. Видоизмененная подобным образом запись формул называется рационализованной. Системы единиц, построенные с использованием рационализованных формул, также называются рационализованными. К их числу принадлежит и СИ.

Величину ε_0 называют электрической постоянной. Она имеет размерность электрической емкости, деленной на длину. Соответственно ее выражают в единицах, называемых фарад на метр.

Чтобы найти числовое значение ε_0, подставим в формулу (1.11) значения величин, соответствующие случаю двух зарядов по 1 Кл, расположенных на расстоянии 1 м друг от друга. Согласно (1.9) сила взаимодействия в этом случае равна $9 \cdot 10^9$ Н. Подставив это значение силы, а также $q_1 = q_2 = 1$ Кл и $r = 1$ м в формулу (1.11), получим следующее равенство:

$$9 \cdot 10^9 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1 \cdot 1}{1^2},$$

из которого следует числовое значение

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 0,885 \cdot 10^{-11} \text{Ф/м}. \tag{1.12}$$

Гауссова система единиц широко использовалась и продолжает использоваться в физической литературе. Поэтому мы считаем необходимым познакомить читателя как с системой единиц СИ, так и с гауссовой системой. Изложение будет вестись в СИ. Попутно будет указываться, как полученные формулы выглядят в гауссовой системе.

1.5. Электрическое поле. Напряженность поля

Взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через **электрическое поле**[5]. Всякий заряд изменяет свойства окружающего его пространства — создает в нем электрическое поле. Это поле проявляет себя в том, что помещенный в какую-либо его точку электрический заряд оказывается под действием силы. Следовательно, для того чтобы выяснить, имеется ли в данном месте электрическое поле, нужно поместить туда заряженное тело (в дальнейшем для краткости мы будем говорить просто «заряд») и установить, испытывает оно действие электрической силы или нет. По величине силы, действующей на данный заряд, можно, очевидно, судить об «интенсивности» поля.

Итак, для обнаружения и исследования электрического поля нужно воспользоваться некоторым «пробным» зарядом. Для того чтобы сила, действующая на пробный заряд, характеризовала поле «в данной точке», пробный заряд должен быть точечным. В противном случае сила, действующая на заряд, будет характеризовать свойства поля, усредненные по объему, занимаемому телом, которое несет на себе пробный заряд.

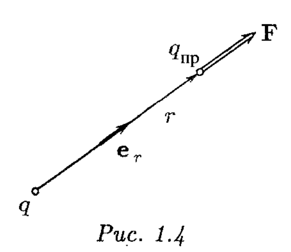


Рис. 1.4

Исследуем с помощью точечного пробного заряда $q_{\text{пр}}$ поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом q. Поместив $q_{\text{пр}}$ в точку, положение которой относительно заряда q определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}$ (рис. 1.4), мы обнаружим, что на пробный заряд действует сила

$$\mathbf{F} = q_{\text{пр}} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \right) \tag{1.13}$$

(см. (1.3) и (1.11)). Здесь $\mathbf{e}_r$ — орт радиуса-вектора $\mathbf{r}$.

Из формулы (1.13) следует, что сила, действующая на пробный заряд, зависит не только от величин, определяющих поле (от q и $\mathbf{r}$), но и от величины пробного заряда $q_{\text{пр}}$.

---

[5]) В § 6.2 мы увидим, что в случае движущихся зарядов, кроме электрического поля, взаимодействие осуществляется также через посредство магнитного поля.

Если брать разные по величине пробные заряды $q'_{\text{пр}}$, $q''_{\text{пр}}$ и т. д., то и силы $\mathbf{F}'$, $\mathbf{F}''$ и т. д., которые они испытывают в данной точке поля, будут различными.

Однако из (1.13) видно, что отношение $\mathbf{F}/q_{\text{пр}}$ для всех пробных зарядов будет одним и тем же и зависит лишь от величин q и $\mathbf{r}$, определяющих поле в данной точке. Поэтому естественно принять это отношение в качестве величины, характеризующей электрическое поле:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_{\text{пр}}}. \tag{1.14}$$

Эту векторную величину называют напряженностью электрического поля в данной точке (т. е. в той точке, в которой пробный заряд $q_{\text{пр}}$ испытывает действие силы $\mathbf{F}$).

В соответствии с формулой (1.14) напряженность электрического поля численно равна силе, действующей на единичный точечный заряд, находящийся в данной точке поля. Направление вектора $\mathbf{E}$ совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд.

Отметим, что формула (1.14) остается справедливой и в том случае, когда в качестве пробного взят отрицательный заряд $q_{\text{пр}} < 0$). В этом случае векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ имеют противоположные направления.

К понятию о напряженности электрического поля мы пришли, исследуя поле неподвижного точечного заряда. Однако определение (1.14) распространяется и на случай поля, создаваемого любой совокупностью неподвижных зарядов. В этом случае, впрочем, необходимо следующее уточнение. Может случиться, что расположение зарядов, обусловливающих исследуемое поле, изменяется под воздействием пробного заряда. Это произойдет, например, когда заряды, создающие поле, расположены на проводнике и могут свободно перемещаться в его пределах. Поэтому, чтобы не внести заметных изменений в исследуемое поле, величину пробного заряда нужно брать достаточно малой.

Из формул (1.14) и (1.13) следует, что напряженность поля точечного заряда прямо пропорциональна величине заряда q и обратно пропорциональна квадрату расстояния r от заряда до данной точки поля:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\mathbf{e}_r. \tag{1.15}$$

Направлен вектор **E** вдоль радиальной прямой, проходящей через заряд и данную точку поля, от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен.

В гауссовой системе формула для напряженности поля точечного заряда в вакууме имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^2}\,\mathbf{e}_r. \qquad (1.16)$$

За единицу напряженности электрического поля принимается напряженность в такой точке, в которой на заряд, равный единице (1 Кл в СИ, 1 СГСЭ-единице заряда в гауссовой системе), действует сила, величина которой также равна единице (1 Н в СИ, 1 дин в гауссовой системе). В гауссовой системе эта единица специального названия не имеет. В СИ единица напряженности электрического поля имеет название вольт на метр и обозначается В/м (см. формулу (1.43)).

В соответствии с (1.15) заряд в 1 Кл создает в вакууме на расстоянии 1 м напряженность

$$E = \frac{1}{4\pi[1/(4\pi\cdot 9\cdot 10^9)]}\,\frac{1}{1^2} = 9\cdot 10^9\ \text{В/м}.$$

Та же напряженность в гауссовой системе равна

$$E = \frac{q}{r^2} = \frac{3\cdot 10^9}{100^2} = 3\cdot 10^5\ \text{СГСЭ-ед.}$$

Сопоставляя оба результата, находим, что

$$1\ \text{СГСЭ-ед. напряженности поля} = 3\cdot 10^4\ \text{В/м}. \qquad (1.17)$$

Согласно (1.14) сила, действующая на пробный заряд, равна $\mathbf{F} = q_{\text{пр}}\mathbf{E}$. Очевидно, что на всякий точечный заряд q [6]) в точке поля с напряженностью **E** будет действовать сила

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \qquad (1.18)$$

[6]) В формуле (1.15) q означает заряд, обусловливающий поле. В формуле (1.18) через q обозначен заряд, испытывающий в точке с напряженностью **E** действие силы **F**.

Если заряд q положителен, направление силы совпадает с направлением вектора $\mathbf{E}$. В случае отрицательного q направления векторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{E}$ противоположны.

В § 1.2 было указано, что сила, с которой система зарядов действует на некоторый не входящий в систему заряд, равна векторной сумме сил, с которыми действует на данный заряд каждый из зарядов системы в отдельности (см. формулу (1.5)). Отсюда вытекает, что *напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из зарядов системы в отдельности:*

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i. \tag{1.19}$$

Последнее утверждение носит название **принципа суперпозиции** (наложения) **электрических полей.**

Принцип суперпозиции позволяет вычислить напряженность поля любой системы зарядов. Разбив протяженные заряды на достаточно малые доли dq, любую систему зарядов можно свести к совокупности точечных зарядов. Вклад каждого из таких зарядов в результирующее поле вычисляется по формуле (1.15).

Электрическое поле можно описать, указав для каждой точки модуль и направление вектора $\mathbf{E}$. Совокупность этих векторов образует поле вектора напряженности электрического поля (ср. с полем вектора скорости; § 9.1 кн. 1). Поле вектора скорости можно представить наглядно с помощью линий тока. Аналогично электрическое поле можно описать с помощью линий напряженности, которые мы будем называть сокращенно линиями $\mathbf{E}$ (их называют также силовыми линиями). Линии напряженности проводят таким образом, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала с направлением вектора $\mathbf{E}$. Густота линий выбирается так, чтобы число линий, пронизывающих единицу поверхности, перпендикулярной к линиям площадки, было равно модулю вектора $\mathbf{E}$. Тогда по картине линий напряженности можно судить о направлении и модуле вектора $\mathbf{E}$ в разных точках пространства (рис. 1.5).

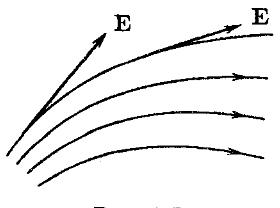


Рис. 1.5

Линии $\mathbf{E}$ поля точечного заряда представляют собой совокупность радиальных прямых, направленных от за-

ряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен (рис. 1.6). Линии одним концом опираются на заряд, другим уходят в бесконечность. В самом деле, полное число линий, пересекающих сферическую поверхность произвольного радиуса r, будет равно произведению густоты линий на поверхность сферы $4\pi r^2$. Густота линий по усло-

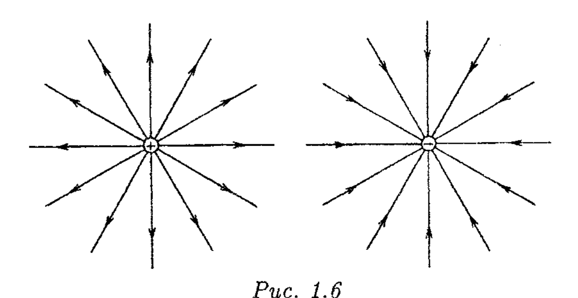


Рис. 1.6

вию численно равна $E = (1/(4\pi\varepsilon_0)) \cdot (q/r^2)$. Следовательно, количество линий численно равно $(1/(4\pi\varepsilon_0)) \cdot (q/r^2) \times$ $\times 4\pi\varepsilon r^2 = q/\varepsilon_0$. Полученный результат означает, что число линий на любом расстоянии от заряда будет одним и тем же. Отсюда и вытекает, что линии нигде, кроме заряда, не начинаются и не заканчиваются: они, начавшись на заряде, уходят в бесконечность (заряд положителен) либо, приходя из бесконечности, заканчиваются на заряде (заряд отрицателен). Это свойство линий **E** является общим для всех электростатических полей, т. е. полей, создаваемых любой системой неподвижных зарядов: линии напряженности могут начинаться или заканчиваться лишь на зарядах либо уходить в бесконечность.

1.6. Потенциал

Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом q. В любой точке этого поля на точечный заряд q' действует сила

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \mathbf{e}_r = F(r)\mathbf{e}_r. \tag{1.20}$$

Здесь $F(r)$ — модуль силы $\mathbf{F}$, $\mathbf{e}_r$ — орт радиуса-вектора $\mathbf{r}$, определяющего положение заряда q' относительно заряда q.

Сила (1.20) является центральной (см. § 3.4 кн. 1). Центральное поле сил консервативно. Следовательно, работа, которая совершается силами поля над зарядом q' при перемещении его из одной точки в другую, не зависит от пути. Эта работа равна

$$A_{12} = \int_1^2 F(r)\mathbf{e}_r\, d\mathbf{l}, \qquad (1.21)$$

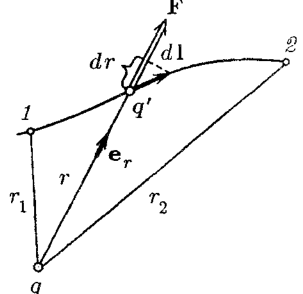


Рис. 1.7

где $d\mathbf{l}$ — элементарное перемещение заряда q'. Из рис. 1.7 видно, что скалярное произведение $\mathbf{e}_r d\mathbf{l}$ равно приращению модуля радиуса-вектора $\mathbf{r}$, т. е. dr. Поэтому формулу (1.21) можно представить в виде

$$A_{12} = \int_1^2 F(r)\, dr$$

(ср. с формулой (3.24) кн. 1). Подстановка выражения для $F(r)$ дает

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qq'}{r_1} - \frac{qq'}{r_2}\right). \qquad (1.22)$$

Работа сил консервативного поля может быть представлена как убыль потенциальной энергии:

$$A_{12} = W_{\text{п}1} - W_{\text{п}2}. \qquad (1.23)$$

Сопоставление формул (1.22) и (1.23) приводит к следующему выражению для потенциальной энергии заряда q' в поле заряда q:

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r} + \text{const}.$$

Значение константы в выражении потенциальной энергии обычно выбирается таким образом, чтобы при удалении заряда на бесконечность (т. е. при $r \to \infty$) потенциальная энергия обращалась в нуль. При этом условии получается, что

$$W_\text{п} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r}. \tag{1.24}$$

Воспользуемся зарядом q' в качестве пробного заряда для исследования поля. Согласно (1.24) потенциальная энергия, которой обладает пробный заряд, зависит не только от его величины q', но и от величин q и r, определяющих поле. Следовательно, эта энергия может быть использована для описания поля, подобно тому как была использована для этой цели сила, действующая на пробный заряд.

Разные пробные заряды $q'_\text{пр}$, $q''_\text{пр}$ и т. д. будут обладать в одной и той же точке поля различной энергией $W'_\text{п}$, $W''_\text{п}$ и т. д. Однако отношение $W_\text{п}/q_\text{пр}$ будет для всех зарядов одним и тем же (см. формулу (1.24)). Величина

$$\varphi = \frac{W_\text{п}}{q_\text{пр}} \tag{1.25}$$

называется **потенциалом поля** в данной точке и используется, наряду с напряженностью поля $\mathbf{E}$, для описания электрических полей.

Из (1.25) следует, что потенциал численно равен потенциальной энергии, которой обладал бы в данной точке поля единичный положительный заряд. Подставив в (1.25) значение потенциальной энергии (1.24), получим для потенциала точечного заряда следующее выражение:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}. \tag{1.26}$$

В гауссовой системе потенциал поля точечного заряда в вакууме определяется формулой

$$\varphi = \frac{q}{r}.$$

Рассмотрим поле, создаваемое системой N точечных зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_N$. Расстояния от каждого из зарядов до данной точки поля обозначим соответственно

$r_1, r_2, \ldots, r_N$. Работа, совершаемая силами этого поля над зарядом q', будет равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{N} A_i.$$

Согласно (1.22) каждая из работ A_i равна

$$A_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{q_i q'}{r_{i2}}\right),$$

где r_{i1} — расстояние от заряда q_i до начального положения заряда q', r_{i2} — расстояние от q_i до конечного положения заряда q'. Следовательно,

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i q'}{r_{i2}}.$$

Сопоставив это выражение с соотношением (1.23), получим для потенциальной энергии заряда q' в поле системы зарядов выражение

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i q'}{r_i},$$

из которого следует, что

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}. \qquad (1.27)$$

Сопоставление полученной формулы с выражением (1.26) приводит к заключению, что потенциал поля, создаваемого системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. В то время как напряженности поля складываются при наложении полей векторно, потенциалы складываются алгебраически. По этой причине вычисление потенциалов оказывается обычно гораздо проще, чем вычисление напряженностей электрического поля.

Из формулы (1.25) вытекает, что заряд q, находящийся в точке поля с потенциалом φ, обладает потенциальной энергией

$$W_{\text{п}} = q\varphi. \tag{1.28}$$

Следовательно, работа сил поля над зарядом q может быть выражена через разность потенциалов:

$$A_{12} = W_{\text{п}1} - W_{\text{п}2} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{1.29}$$

Таким образом, работа, совершаемая над зарядом силами поля, равна произведению величины заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках (т. е. на убыль потенциала).

Если заряд q из точки с потенциалом φ удаляется на бесконечность (где по условию потенциал равен нулю), работа сил поля будет равна

$$A_{\infty} = q\varphi. \tag{1.30}$$

Отсюда следует, что потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки на бесконечность. Такую же по величине работу нужно совершить против сил электрического поля для того, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля.

Формулу (1.30) можно использовать для установления единиц потенциала. За единицу потенциала принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности единичного положительного заряда необходимо совершить работу, равную единице. Так, в СИ за единицу потенциала, называемую вольтом[7]) (сокращенное обозначение В), принимается потенциал в такой точке, для перемещения в которую из бесконечности заряда, равного 1 кулону, нужно совершить работу в 1 джоуль:

$$1\ \text{Дж} = 1\ \text{Кл} \cdot 1\text{В}.$$

Отсюда

$$1\ \text{В} = \frac{1\ \text{Дж}}{1\ \text{Кл}}. \tag{1.31}$$

---

[7]) В честь Алессандро Вольта (1745–1827) — итальянского физика и физиолога, одного из основателей учения об электричестве.

За абсолютную электростатическую единицу потенциала (СГСЭ-ед. потенциала) принимается потенциал в такой точке, для перемещения в которую из бесконечности заряда, равного +1 единице СГСЭ, нужно совершать работу в 1 эрг. Выражая в (1.31) 1 Дж и 1 Кл через единицы СГСЭ, найдем соотношение между вольтом и СГСЭ-ед. потенциала:

$$1\text{ В} = \frac{1\text{ Дж}}{1\text{ Кл}} = \frac{10^7\text{ эрг}}{3\cdot 10^9\text{ СГСЭ-ед.}} = \frac{1}{300}\text{ СГСЭ-ед. потенциала.} \quad (1.32)$$

Таким образом, одна СГСЭ-единица потенциала равна 300 В.

В физике часто пользуются единицей энергии и работы, называемой электронвольтом (эВ). Под электронвольтом подразумевается работа, совершаемая силами поля над зарядом, равным заряду электрона (т. е. над элементарным зарядом e), при прохождении им разности потенциалов в 1 В:

$$1\text{ эВ} = 1,60\cdot 10^{-19}\text{ Кл}\cdot 1\text{ В} = 1,60\cdot 10^{-19}\text{ Дж} = 1,60\cdot 10^{-12}\text{ эрг}. \quad (1.33)$$

Используются также кратные электронвольту единицы:

$$1\text{ кэВ (килоэлектронвольт)} = 10^3\text{ эВ},$$
$$1\text{ МэВ (мегаэлектронвольт)} = 10^6\text{ эВ},$$
$$1\text{ ГэВ (гигаэлектронвольт)} = 10^9\text{ эВ}.$$

1.7. Энергия взаимодействия системы зарядов

Выражение (1.24) можно рассматривать как взаимную потенциальную энергию зарядов q и q'. Обозначив заряды через q_1 и q_2, получим для их энергии взаимодействия формулу

$$W_\text{п} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}}. \quad (1.34)$$

Расстояние между зарядами мы обозначили символом r_{12}.

Рассмотрим систему, состоящую из N точечных зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_N$. В § 3.6 кн. 1 было показано, что энергия взаимодействия такой системы равна сумме энергий взаимодействия зарядов, взятых попарно:

$$W_\text{п} = \frac{1}{2} \sum_{(i \neq k)} W_{\text{п}ik}(r_{ik}) \tag{1.35}$$

(см. формулу (3.60) кн. 1). Согласно (1.34)

$$W_{\text{п}ik} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}.$$

Подстановка этого выражения в формулу (1.35) дает

$$W_\text{п} = \frac{1}{2} \sum_{(i \neq k)}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}. \tag{1.36}$$

В гауссовой системе в этой формуле отсутствует множитель $1/(4\pi\varepsilon_0)$.

В формуле (1.36) суммирование производится по индексам i и k. Оба индекса пробегают, независимо друг от друга, все значения от 1 до N. Слагаемые, для которых значение индекса i совпадает со значением индекса k, не принимаются во внимание. Придадим формуле (1.36) следующий вид:

$$W_\text{п} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_k}{r_{ik}}. \tag{1.37}$$

Выражение

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{N} \frac{q_k}{r_{ik}}$$

представляет собой потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме q_i, в той точке, где помещается заряд q_i.

Приняв это во внимание, получим для энергии взаимодействия следующую формулу:

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\varphi_i. \qquad (1.38)$$

1.8. Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом

Электрическое поле можно описать либо с помощью векторной величины **E**, либо с помощью скалярной величины φ. Очевидно, что между этими величинами должна существовать определенная связь. Если учесть, что **E** пропорционально силе, действующей на заряд, а φ — потенциальной энергии заряда, легко сообразить, что эта связь должна быть аналогична связи между потенциальной энергией и силой.

Сила **F** связана с потенциальной энергией соотношением

$$\mathbf{F} = -\nabla W_{\text{п}} \qquad (1.39)$$

(см. формулу (33.2) кн. 1). Для заряженной частицы, находящейся в электростатическом поле, $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, $W_{\text{п}} = q\varphi$. Подставив эти значения в соотношение (1.39), получим, что

$$q\mathbf{E} = -\nabla(q\varphi).$$

Константу q можно вынести за знак градиента. Осуществив это и сократив затем на q, придем к формуле

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \qquad (1.40)$$

устанавливающей связь между напряженностью поля и потенциалом.

Приняв во внимание определение градиента (см. формулу (3.31) кн. 1), можно написать, что

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z. \qquad (1.41)$$

Следовательно, в проекциях на координатные оси соотношение (1.40) имеет вид

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (1.42)$$

Аналогично проекция вектора **E** на произвольное направление l равна взятой с обратным знаком производной φ по l, т. е. скорости убывания потенциала при перемещении вдоль направления l:

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}. \tag{1.43}$$

В справедливости формулы (1.43) легко убедиться, выбрав направление l в качестве одной из координатных осей и приняв во внимание соотношение (1.42).

Поясним соотношение (1.40) на примере поля точечного заряда. Потенциал этого поля выражается формулой (1.26). Перейдя к декартовым координатам, получим выражение

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Частная производная этой функции по x равна

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{r^3}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{r^3}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}.$$

Подставив найденные значения производных в формулу (1.41), придем к выражению

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\mathbf{e}_r}{r^2},$$

которое совпадает с (1.15).

Формула (1.40) позволяет по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке. Можно решить и обратную задачу, т. е. по заданным значениям **E** в каждой точке найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля. Для этого воспользуемся тем, что работа, совершаемая силами поля над зарядом q

при перемещении его из точки *1* в точку *2*, может быть вычислена как

$$A_{12} = \int_1^2 q\mathbf{E}\, d\mathbf{l}.$$

Вместе с тем в соответствии с (1.29) та же работа может быть представлена в виде

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Приравняв друг другу эти два выражения и сократив на q, придем к соотношению

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E}\, d\mathbf{l}. \tag{1.44}$$

Интеграл можно брать по любой линии, соединяющей точки *1* и *2*, ибо работа сил поля не зависит от пути. Для обхода по замкнутому контуру $\varphi_1 = \varphi_2$ и формула (1.44) переходит в соотношение

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0 \tag{1.45}$$

(кружок у знака интеграла указывает на то, что интегрирование производится по замкнутому пути). Заметим, что это соотношение справедливо только для электростатического поля. Впоследствии мы выясним, что поле движущихся зарядов (т. е. поле, изменяющееся со временем) не является потенциальным; следовательно, условие (1.45) для него не выполняется.

Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется эквипотенциальной поверхностью. Ее уравнение имеет вид

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}.$$

При перемещении по эквипотенциальной поверхности на отрезок dl потенциал не изменяется ($d\varphi = 0$). Следовательно, согласно формуле (1.43) касательная к поверхности составляющая вектора $\mathbf{E}$ равна нулю. Отсюда заключаем, что вектор $\mathbf{E}$ в каждой точке направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности, проходящей через данную точку. Приняв во внимание, что вектор $\mathbf{E}$

направлен по касательной к линии **E**, легко сообразить, что линии напряженности в каждой точке ортогональны к эквипотенциальным поверхностям.

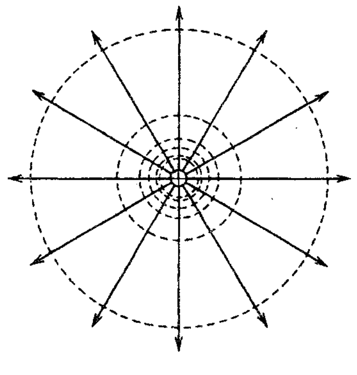


Рис. 1.8

Эквипотенциальную поверхность можно провести через любую точку поля. Следовательно, таких поверхностей может быть построено бесконечное множество. Условливаются проводить поверхности таким образом, чтобы разность потенциалов для двух соседних поверхностей была всюду одна и та же. Тогда по густоте эквипотенциальных поверхностей можно судить о напряженности поля. Действительно, чем гуще располагаются эквипотенциальные поверхности, тем быстрее изменяется потенциал при перемещении вдоль нормали к поверхности. Следовательно, тем больше в данном месте $\nabla\varphi$, а значит, и **E**.

На рис. 1.8 показаны эквипотенциальные поверхности (точнее, их пересечения с плоскостью чертежа) для поля точечного заряда. В соответствии с характером зависимости E от r эквипотенциальные поверхности при приближении к заряду становятся гуще.

Для однородного поля эквипотенциальные поверхности представляют собой систему равноотстоящих друг от друга плоскостей, перпендикулярных к направлению поля.

1.9. Диполь

Электрическим диполем называется система двух одинаковых по абсолютной величине разноименных точечных зарядов $+q$ и $-q$, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния до тех точек, в которых определяется поле системы. Прямая, проходящая через оба заряда, называется осью диполя.

Вычислим сначала потенциал, а затем напряженность поля диполя. Это поле обладает осевой симметрией. Поэтому картина поля в любой плоскости, проходящей через ось диполя, будет одной и той же, причем вектор **E** лежит в этой плоскости. Положение точки относительно диполя

будем характеризовать с помощью радиуса-вектора $\mathbf{r}$ либо с помощью полярных координат r и ϑ (рис. 1.9). Введем вектор $\mathbf{l}$, проведенный от отрицательного заряда к положительному. Положение заряда $+q$ относительно центра диполя определяется вектором $+\mathbf{a}$, заряда $-q$ — вектором $-\mathbf{a}$. Очевидно, что $\mathbf{l} = 2\mathbf{a}$. Расстояния до данной точки от зарядов $+q$ и $-q$ обозначим соответственно через r_+ и r_-. Ввиду малости a по сравнению с r можно положить приближенно, что

$$\begin{aligned} r_+ &= r - a\cos\vartheta = r - \mathbf{a}\mathbf{e}_r, \\ r_- &= r + a\cos\vartheta = r + \mathbf{a}\mathbf{e}_r. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Потенциал в точке, определяемой радиусом-вектором $\mathbf{r}$, равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(r_- - r_+)}{r_+ r_-}.$$

Произведение $r_+ r_-$ можно заменить на r^2. Разность $r_- - r_+$ согласно формулам (1.46) равна $2\mathbf{a}\mathbf{e}_r = \mathbf{l}\mathbf{e}_r$. Следовательно,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\mathbf{l}\mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\mathbf{e}_r}{r^2}, \tag{1.47}$$

где

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l} \tag{1.48}$$

есть характеристика диполя, называемая его **электрическим моментом**. Вектор $\mathbf{p}$ направлен по оси диполя от отрицательного заряда к положительному (рис. 1.10).

Из формулы (1.47) вытекает, что поле диполя определяется его электрическим моментом $\mathbf{p}$. Ниже мы увидим, что и поведение диполя во внешнем

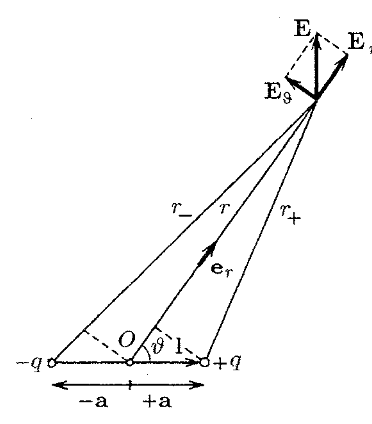


Рис. 1.9

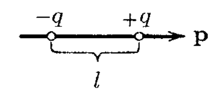


Рис. 1.10

электрическом поле также определяется его электрическим моментом $\mathbf{p}$. Сравнение с выражением (1.26) показывает, что потенциал поля диполя убывает с расстоянием быстрее (как $1/r^2$), чем потенциал поля точечного заряда (который изменяется по закону $1/r$).

Из рис. 1.9 видно, что $\mathbf{p}\mathbf{e}_r = p\cos\vartheta$. Поэтому выражение (1.47) можно написать следующим образом:

$$\varphi(r,\vartheta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\vartheta}{r^2}. \tag{1.49}$$

Чтобы найти напряженность поля диполя, вычислим по формуле (1.43) проекции вектора $\mathbf{E}$ на два взаимно перпендикулярных направления. Одно из них определяется движением точки, вызванным изменением расстояния r (при фиксированном ϑ), второе — движением точки, обусловленным изменением угла ϑ (при фиксированном r; см. рис. 1.9). Первая проекция получается путем дифференцирования выражения (1.49) по r:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\vartheta}{r^3}. \tag{1.50}$$

Вторую проекцию (обозначим ее E_ϑ) получим, взяв отношение приращения потенциала φ, получающегося при возрастании угла ϑ на $d\vartheta$, к расстоянию $r\,d\vartheta$, на которое перемещается при этом конец отрезка r (в этом случае фигурирующее в формуле (1.43) dl равно $r\,d\vartheta$). Таким образом,

$$E_\vartheta = -\partial\varphi/r\,d\vartheta = (-1/r)\partial\varphi/\partial\vartheta.$$

Подставив значение производной от функции (1.49) по ϑ, получим

$$E_\vartheta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\vartheta}{r^3}. \tag{1.51}$$

Сумма квадратов выражений (1.50) и (1.51) дает квадрат вектора $\mathbf{E}$ (см. рис. 1.9):

$$E^2 = E_r^2 + E_\vartheta^2 = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{p}{r^3}\right)^2(4\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) =$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{p}{r^3}\right)^2(1 + 3\cos^2\vartheta).$$

Отсюда

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta}. \tag{1.52}$$

Положив в (1.52) $\vartheta = 0$, получим напряженность на оси диполя:

$$E_{||} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}. \tag{1.53}$$

Вектор $\mathbf{E}_{||}$ направлен по оси диполя. Это согласуется с осевой симметрией задачи. Из формулы (1.50) следует, что $E_r > 0$ при $\vartheta = 0$ и $E_r < 0$ при $\vartheta = \pi$. Это означает, что в любом случае вектор $\mathbf{E}_{||}$ имеет направление, совпадающее с направлением от $-q$ к $+q$ (т. е. с направлением $\mathbf{p}$). Поэтому формулу (1.53) можно написать в векторном виде:

$$\mathbf{E}_{||} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\mathbf{p}}{r^3}. \tag{1.54}$$

Положив в (1.52) $\vartheta = \pi/2$, получим напряженность на прямой, проходящей через центр диполя и перпендикулярной к его оси:

$$E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}. \tag{1.55}$$

Согласно формуле (1.50) при $\vartheta = \pi/2$ проекция E_r равна нулю. Следовательно, вектор $\mathbf{E}_{\perp}$ параллелен оси диполя. Из формулы (1.51) следует, что при $\vartheta = \pi/2$ проекция E_ϑ положительна. Это означает, что вектор $E_{\perp}$ направлен в сторону возрастания угла ϑ, т. е. антипараллельно вектору $\mathbf{p}$.

Характерным для напряженности поля диполя является то обстоятельство, что она убывает с расстоянием от диполя как $1/r^3$, т. е. быстрее, чем напряженность поля точечного заряда (убывающая как $1/r^2$).

На рис. 1.11 показаны линии $\mathbf{E}$ поля диполя. В соответствии с определением электрического диполя изображенное поле можно считать полем диполя лишь за пределами сферы, показанной штриховой линией (радиус этой сферы $r \gg l$; по понятным причинам на рисунке это условие не соблюдено). Поле внутри сферы есть просто поле

двух разноименных зарядов. Между полем диполя и полем разноименных зарядов нет четкой границы. Чем больше отношение r/l, тем точнее описывается поле за пределами сферы формулами, полученными в данном параграфе.

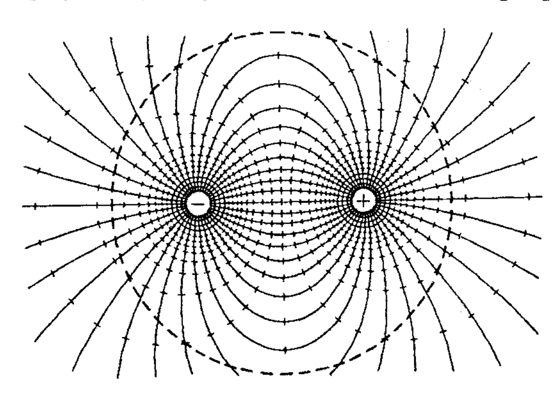


Рис. 1.11

Согласно формуле (1.49) при $\vartheta = \pi/2$ потенциал обращается в нуль для всех r. Таким образом, все точки плоскости, перпендикулярной к оси диполя и проходящей через его середину, имеют нулевой потенциал. Это можно было предвидеть заранее, поскольку расстояния от зарядов $+q$ и $-q$ до любой точки этой плоскости одинаковы.

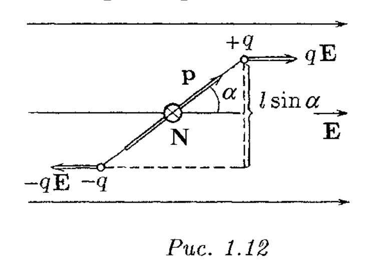


Рис. 1.12

Теперь рассмотрим поведение диполя во внешнем электрическом поле. Если диполь поместить в однородное электрическое поле, образующие диполь заряды $+q$ и $-q$ окажутся под действием равных по модулю, но противоположных по направлению сил $\mathbf{F}_1 = q\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}_2 = -q\mathbf{E}$ (рис. 1.12). Эти силы образуют пару, плечо которой равно $l \sin\alpha$, т. е. зависит от ориентации диполя относительно поля. Модуль каждой из сил равен qE. Умножив его на плечо, получим модуль момента пары сил, действующих на диполь:

$$N = qEl\sin\alpha = pE\sin\alpha \qquad (1.56)$$

(p — электрический момент диполя). Легко сообразить,

что формула (1.56) может быть написана в векторном виде:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{pE}]. \tag{1.57}$$

Момент сил (1.57) стремится повернуть диполь так, чтобы его электрический момент **p** установился по направлению поля.

Найдем потенциальную энергию, которой обладает диполь во внешнем электрическом поле. Согласно формуле (1.28) эта энергия равна

$$W_п = q\varphi_+ - q\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-). \tag{1.58}$$

Здесь φ_+ и φ_- — значения потенциала внешнего поля в тех точках, где помещаются заряды $+q$ и $-q$.

Рис. 1.13

Потенциал однородного поля убывает линейно в направлении вектора **E**. Приняв это направление за ось x (рис. 1.13), можно написать, что $E = E_x = -d\varphi/dx$. Из рис. 1.13 видно, что разность $\varphi_+ - \varphi_-$ равна приращению потенциала на отрезке $\Delta x = l\cos\alpha$:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{d\varphi}{dx}\, l\cos\alpha = -El\cos\alpha.$$

Подставив это значение в формулу (1.58), получим, что

$$W_п = -qEl\cos\alpha = -pE\cos\alpha. \tag{1.59}$$

В этой формуле α есть угол между векторами **p** и **E**, поэтому ее можно написать в виде

$$W_п = -\mathbf{pE}. \tag{1.60}$$

Заметим, что это выражение не учитывает энергию взаимодействия зарядов $+q$ и $-q$, образующих диполь.

Мы получили формулу (1.60), считая для простоты поле однородным. Однако эта формула справедлива и для неоднородного поля.

По поводу формул (1.57) и (1.60) можно заметить следующее. Как вращающий момент, так и энергия должны

определяться свойствами диполя (его моментом **p**) и свойствами поля (напряженностью **E**). Самый простой и «естественный» способ, каким можно «сконструировать» из двух векторов третий, — перемножить их векторно. В результате получится выражение (1.57). Самый «естественный» способ, каким можно получить из двух векторов скаляр, — перемножить их скалярно. В результате получится

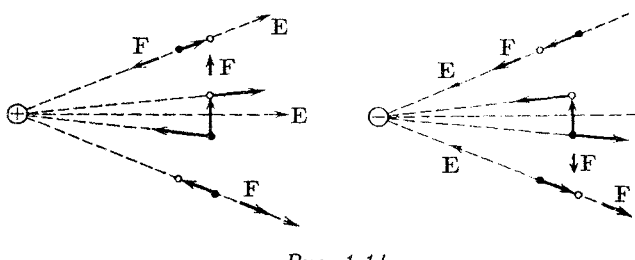


Рис. 1.14

выражение (1.60). Легко проверить, что с размерностью в обоих случаях все обстоит благополучно.

В неоднородном электрическом поле на диполь, кроме вращающего момента (1.57), действует сила, стремящаяся сообщить ему поступательное движение. Покажем это на примере поля точечного заряда (рис. 1.14; светлая точка — положительный заряд диполя, черная — отрицательный заряд). Из рисунка следует, что диполь, ориентированный по полю, втягивается в область более сильного поля (для краткости будем говорить: «втягивается в поле»). Диполь, ориентированный против поля, выталкивается из поля. На диполь, перпендикулярный к полю, действует сила, направленная по оси диполя.

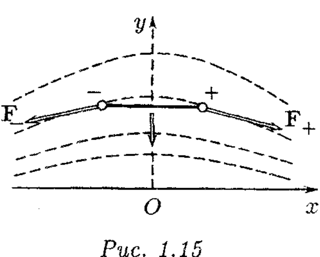


Рис. 1.15

Поле, изображенное на рис. 1.15, наблюдается у краев плоского конденсатора. И здесь диполь, ориентированный по полю, втягивается в поле. Легко убедиться в том, что диполь, ориентированный против поля, выталкивался бы из поля.

Чтобы получить формулу для силы, действующей на диполь в неоднородном поле, рассмотрим диполь, находящийся в неоднородном поле, обладающем симметрией относительно оси x (частным слу-

чаем такого поля является поле точечного заряда, если в качестве оси x взять прямую, проходящую через заряд). Пусть центр диполя лежит на этой оси, причем электрический момент диполя образует с осью угол α, отличный от $\pi/2$ (рис.1.16). В этом случае силы, действующие на заряды диполя, не одинаковы по модулю. Поэтому, кроме вращающего момента, на диполь будет действовать сила, стремящаяся переместить его в направлении оси x. Чтобы получить значение этой силы, воспользуемся формулой (1.39), согласно которой

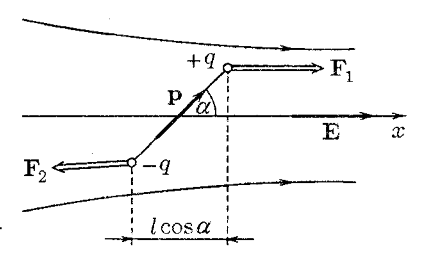


Рис. 1.16

$$F_x = -\partial W_\text{п}/\partial x, \quad F_y = -\partial W_\text{п}/\partial y, \quad F_z = -\partial W_\text{п}/\partial z.$$

В соответствии с (1.59)

$$W_\text{п}(x, y, z) = -pE(x, y, z)\cos\alpha.$$

Для точек оси x производные E по y и z равны нулю. Соответственно $\partial W_\text{п}/\partial y = \partial W_\text{п}/\partial z = 0$. Таким образом, отлична от нуля лишь компонента силы F_x. Она равна

$$F_x = -\frac{\partial W_\text{п}}{\partial x} = p\frac{\partial E}{\partial x}\cos\alpha \qquad (1.61)$$

(ориентацию диполя относительно вектора **E** считаем неизменной: $\alpha = \text{const}$). Этот результат можно получить, приняв во внимание, что напряженность поля в точках, где помещаются заряды $+q$ и $-q$ (см. рис. 1.16), различается на величину $(\partial E/\partial x)l\cos\alpha$. Соответственно разность сил, действующих на заряды, равна $q(\partial E/\partial x)l\cos\alpha$, что совпадает с (1.61).

При $\alpha < \pi/2$ определяемая формулой (1.61) величина F_x положительна. Это означает, что под действием силы диполь втягивается в область более сильного поля (см. рис. 1.16). При $\alpha > \pi/2$ диполь выталкивается из поля.

В случае, изображенном на рис. 1.15, у силы, действующей на диполь, отлична от нуля лишь компонента F_y, которая равна

$$F_y = p\frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Слева от начала координат E_y положительна, а справа отрицательна. Отсюда заключаем, что $\partial E_y/\partial x$, а следовательно, и F_y, отрицательна. Таким образом, сила имеет направление, показанное на рисунке, — диполь втягивается в поле.

Отметим, что подобно тому, как $-\partial W_\text{п}/\partial x$ дает проекцию на ось x силы, действующей на систему, производная от выражения (1.59) по α, взятая с обратным знаком, дает проекцию вращательного момента на «ось» α : $N_\alpha = -pE\sin\alpha$. Знак минус означает, что «ось» α и момент N имеют противоположные направления (см. рис. 1.12).

1.10. Поле системы зарядов на больших расстояниях

Возьмем систему N зарядов $q_1, q_2, ..., q_N$, размещенных в объеме с линейными размерами порядка l, и исследуем поле, создаваемое этой системой на расстояниях r, больших по сравнению с l ($r \gg l$). Выберем начало координат O внутри объема, занимаемого системой, и определим положения зарядов с помощью радиусов-векторов $\mathbf{r}_i$ (рис. 1.17; чтобы не загромождать рисунок, мы показали только радиус-вектор i-го заряда).

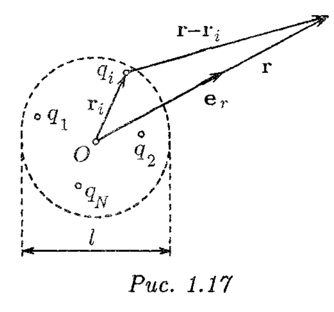


Рис. 1.17

Потенциал в точке, определяемой радиусом-вектором $\mathbf{r}$, равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}. \qquad (1.62)$$

Вследствие малости r_i по сравнению с r можно положить, что

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i| = r - \mathbf{r}_i\mathbf{e}_r = r(1 - \mathbf{r}_i\mathbf{e}_r/r)$$

(ср. с (1.46)). Подстановка этого выражения в формулу (1.62) дает

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r}\frac{1}{1-\mathbf{r}_i\mathbf{e}_r/r}. \qquad (1.63)$$

Воспользовавшись формулой

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x,$$

справедливой при $x \ll 1$, преобразуем выражение (1.63) следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r}\left(1+\frac{\mathbf{r}_i\mathbf{e}_r}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum q_i}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\sum q_i\mathbf{r}_i\right)\mathbf{e}_r}{r^2}. \qquad (1.64)$$

Первый член полученного выражения представляет собой потенциал поля точечного заряда величины $q = \sum q_i$ (ср. с (1.26)). Второй член имеет такой же вид, как выражение, определяющее потенциал поля диполя, причем роль электрического момента диполя играет величина

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i\mathbf{r}_i. \qquad (1.65)$$

Рис. 1.18

Эта величина называется **дипольным электрическим моментом** системы зарядов. Легко проверить, что в случае диполя формула (1.65) переходит в уже знакомое нам выражение: $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$.

Если суммарный заряд системы равен нулю ($\Sigma q_i = 0$), значение дипольного момента не зависит от выбора начала координат. Чтобы убедиться в этом, возьмем два произвольных начала координат O и O' (рис. 1.18). Между радиусами-векторами i-го заряда, проведенными из этих точек, имеется соотношение

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{b} + \mathbf{r}_i \qquad (1.66)$$

(что такое вектор $\mathbf{b}$, ясно из рисунка). С учетом (1.66) дипольный момент в системе с началом O' равен

$$\mathbf{p}' = \sum q_i \mathbf{r}_i = \sum q_i(\mathbf{b} + \mathbf{r}_i) = \mathbf{b}\sum q_i + \sum q_i \mathbf{r}_i.$$

Первое слагаемое равно нулю (так как $\sum q_i = 0$); второе представляет собой $\mathbf{p}$ — дипольный момент в системе координат с началом в точке O. Таким образом, мы получили, что $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$.

Выражение (1.64) по существу представляет собой первые члены разложения функции (1.62) в ряд по степеням величин r_i/r. Если $\sum q_i \neq 0$, основной вклад в потенциал вносит первый член формулы (1.64) (второй член убывает как $1/r^2$ и потому много меньше первого). Для электрически нейтральной системы ($\sum q_i = 0$) первый член равен нулю, и потенциал определяется в основном вторым членом формулы (1.64). Так, в частности, обстоит дело в случае поля диполя.

Для изображенной на рис. 1.19*а* системы зарядов, называемой квадруполем, и Σq_i, и $\mathbf{p}$ равны нулю, так что формула (1.64) дает нулевое значение потенциала. В действительности же поле квадруполя хотя и много слабее, чем поле диполя (с такими же q и l), но отлично от нуля. Потенциал поля, создаваемого квадруполем, определяется в основном третьим членом разложения, который пропорционален $1/r^3$. Для получения этого члена нужно учесть величины порядка $(r_i/r)^2$, которыми мы пренебрегали при выводе формулы (1.64). Для показанной на рис. 1.19*б* системы зарядов, называемой октуполем, равен нулю и третий член разложения. Потенциал поля такой системы определяется четвертым членом разложения, который пропорционален $1/r^4$.

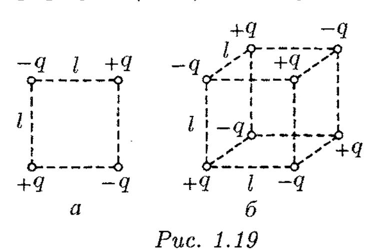


Рис. 1.19

Отметим, что стоящая в числителе первого члена формулы (1.64) величина, равная $\sum q_i$, называется монополем или мультиполем нулевого порядка, диполь называется мультиполем первого порядка,

квадруполь — мультиполем второго порядка и т. д.

Итак, в общем случае поле системы зарядов на больших расстояниях можно представить как наложение полей, создаваемых мультиполями разных порядков — монополем, диполем, квадруполем, октуполем и т. д.

1.11. Описание свойств векторных полей

Чтобы продвинуться дальше в изучении электрического поля, необходимо ознакомиться с математическим аппаратом, применяемым для описания свойств векторных полей. Этот аппарат называется векторным анализом. В данном параграфе мы рассмотрим основные понятия и некоторые формулы векторного анализа, а также докажем две главные теоремы векторного анализа: теорему Остроградского–Гаусса и теорему Стокса.

Наибольшую наглядность величины, используемые в векторном анализе, имеют в случае поля вектора скорости текущей жидкости. Поэтому мы будем вводить эти величины, рассматривая течение идеальной несжимаемой жидкости, а затем распространять полученные результаты на векторные поля любой природы.

С одним из понятий векторного анализа мы уже знакомы. Это — градиент, используемый для характеристики скалярных полей. Если каждой точке P с координатами x, y, z сопоставляется значение скалярной величины $\varphi = \varphi(x, y, z)$, говорят, что задано скалярное поле φ. Градиентом величины φ называется вектор

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z. \tag{1.67}$$

Приращение функции φ при смещении на отрезок $d\mathbf{l} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz$ равно

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz,$$

что можно представить в виде

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l}. \tag{1.68}$$

Теперь перейдем к установлению характеристик векторных полей.

Поток вектора. Пусть течение жидкости охарактеризовано полем вектора скорости. Объем жидкости, протекающей в единицу времени через некоторую воображаемую поверхность S, называется потоком жидкости через эту поверхность. Чтобы найти поток, разобьем поверхность на элементарные участки ΔS.

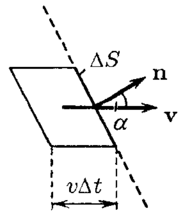


Рис. 1.20

Из рис. 1.20 видно, что за время Δt через участок ΔS пройдем объем жидкости, равный

$$\Delta V = \Delta S \cos\alpha \cdot v\Delta t.$$

Разделив этот объем на промежуток времени Δt, найдем поток через поверхность ΔS:

$$\Delta\Phi = \Delta V/\Delta t = \Delta S v \cos\alpha.$$

Перейдя к дифференциалам, получим, что

$$d\Phi = v\cos\alpha \cdot dS. \qquad (1.69)$$

Формулу (1.69) можно написать еще двумя способами. Во-первых, если учесть, что $v\cos\alpha$ дает проекцию вектора скорости на нормаль $\mathbf{n}$ к площадке dS, можно представить (1.69) в виде

$$d\Phi = v_n dS. \qquad (1.70)$$

Во-вторых можно ввести вектор $d\mathbf{S}$ модуль которого равен площадке dS, а направление совпадает с направлением нормали к площадке $\mathbf{n}$:

$$d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}.$$

Поскольку выбор направления вектора $\mathbf{n}$ условен (его можно направить как в одну сторону от площадки, так и в другую), $d\mathbf{S}$ является не истинным вектором, а псевдовектором. Угол α в формуле (1.69) есть угол между векторами $\mathbf{v}$ и $d\mathbf{S}$. Следовательно, эту формулу можно написать в виде

$$d\Phi = \mathbf{v}d\mathbf{S}. \qquad (1.71)$$

Просуммировав потоки через все элементарные площадки, на которые мы разбили поверхность S, получим поток жидкости через S:

$$\Phi_{\mathbf{v}} = \int\limits_S \mathbf{v}\,d\mathbf{S} = \int\limits_S v_n\,dS. \qquad (1.72)$$

Аналогичное выражение, написанное для произвольного векторного поля **a**, т. е. величина

$$\Phi_{\mathbf{a}} = \int\limits_S \mathbf{a}\,d\mathbf{S} = \int\limits_S a_n\,dS, \tag{1.73}$$

называется потоком вектора **a** через поверхность S.

Мы будем обозначать поток буквой Φ, дополняя ее индексом, указывающим, поток какого вектора имеется в виду: $\Phi_{\mathbf{a}}$ — поток вектора **a**, Φ_E — поток вектора **E** и т. д. В соответствии с этим поток (1.72) следует считать потоком вектора **v** (поэтому мы обозначили его через $\Phi_{\mathbf{v}}$). Таким образом, поток жидкости совпадает с потоком вектора **v**.

Поток вектора есть алгебраическая величина, причем знак его зависит от выбора направления нормали к элементарным площадкам, на которые разбивается поверхность S при вычислении потока. Изменение направления нормали на противоположное изменяет знак у a_n, а следовательно, и знак величины (1.73). В случае замкнутых поверхностей принято вычислять поток, «вытекающий» из охватываемой поверхностью области наружу. Соответственно в качестве **n** в дальнейшем будет всегда подразумеваться обращенная наружу (т. е. внешняя) нормаль.

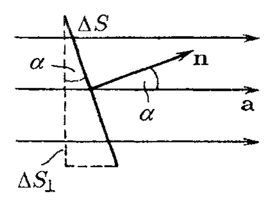


Рис. 1.21

Потоку вектора можно дать наглядную геометрическую интерпретацию. Для этого представим векторное поле системой линий **a**, построенных так, чтобы густота линий в каждом месте была численно равна модулю вектора **a** в той же точке поля (ср. с правилом построения линий вектора **E**, изложенным в конце § 1.5). Найдем число ΔN пересечений линий поля с воображаемой площадкой ΔS.

На рис. 1.21 показаны линии вектора **a** в окрестности площадки ΔS. Число линий, пронизывающих площадку, равно густоте линий, умноженной на $\Delta S_\perp$. Из рисунка видно, что $\Delta S_\perp = \Delta S\cos\alpha$. Следовательно, число ΔN пересечений линиями поля площадки ΔS определяется выражением

$$\Delta N = \text{густота линий} \cdot \Delta S\cos\alpha.$$

По условию построения линий их густота численно равна a (модулю вектора $\mathbf{a}$). Поэтому можно написать, что

$$\Delta N(=)a\Delta S\cos\alpha = \mathbf{a}\Delta\mathbf{S}.$$

Размерности ΔN и $a\Delta S$ не совпадают. Поэтому речь идет лишь о численном равенстве. Чтобы указать это, знак равенства взят в скобки. Согласно (1.73) $a\Delta S = \Delta\Phi_{\mathbf{a}}$. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\Delta\Phi_{\mathbf{a}}(=)\Delta N. \tag{1.74}$$

Поток, как мы уже отмечали, есть величина алгебраическая. Например, при указанном на рис. 1.22 направлении нормали (это направление во всех точках поверхности должно выбираться одинаково) для площадки в точке A $\Delta\Phi_{\mathbf{a}} < 0$, а для площадки в точке B $\Delta\Phi_{\mathbf{a}} > 0$. Следовательно, и ΔN надо считать алгебраической величиной: тем пересечениям, у которых угол α между направлением линии поля и нормалью к площадке является острым (пересечение B на рис. 1.22), надо приписывать знак плюс, а тем, у которых угол α тупой (пересечение A на рис. 1.22), — знак минус.

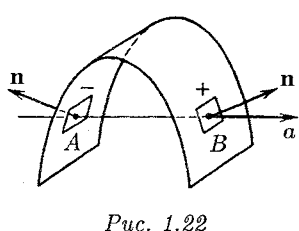


Рис. 1.22

Просуммировав соотношение (1.74) по всей воображаемой поверхности, придем к формуле

$$\Phi_{\mathbf{a}}(=)\sum\Delta N = N_{+} - N_{-}. \tag{1.75}$$

Здесь N_{+} — полное число положительных пересечений линий поля с поверхностью S, а N_{-} — полное число отрицательных пересечений.

При пользовании формулами (1.74) и (1.75) нужно иметь в виду, что поток, как правило, выражается нецелым числом. Соответственно и число пересечений также будет нецелым. Это не должно нас смущать, поскольку линии поля представляют собой чисто условный вспомогательный образ. Чтобы понять, что означает «нецелое число пересечений», рассмотрим рис. 1.23, на котором изображены две одинаковые площадки ΔS, помещенные в разные точки однородного поля. Очевидно, что поток

$\Delta\Phi_a$ через обе площадки одинаков. Однако, если судить чисто формально, поток через площадку ΔS_1 равен $+1$, а через ΔS_2 — нулю (на штриховые линии пока не надо обращать внимания). Чтобы устранить это противоречие, проведем дополнительно к каждой основной линии (они изображены на рис. 1.23 сплошными) девять дополнительных (дополнительные линии, лежащие в плоскости рисунка, изображены штрихами). Тогда густота линий будет в 10 раз больше, но «цена» каждой линии станет равной 0,1.

Допустим, что теперь площадку ΔS_1 пересекают три линии, а площадку ΔS_2 — две линии. Это означает, что поток через ΔS_1 равен приблизительно 0,3, а через ΔS_2 — примерно 0,2. Проведя опять дополнительные линии, увеличим густоту линий еще в 10 раз. Пусть площадку ΔS_1 теперь пересекают 28 линий, а площадку ΔS_2 — 27 линий. Следовательно, для ΔS_1 будет получено значение потока, равное 0,28, а для ΔS_2 — равное 0,27. Продолжая процесс увеличения густоты линий, можно получить дроб-

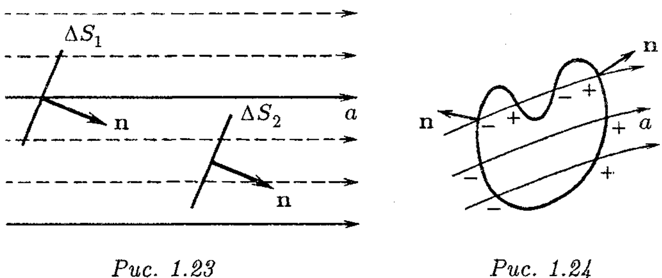


Рис. 1.23 *Рис. 1.24*

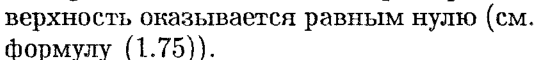
ное число пересечений со сколь угодно большой точностью. При этом разность чисел пересечений для площадок ΔS_1 и ΔS_2 будет стремиться к нулю.

Заметим, что практически подсчитывать числа пересечений нам не придется. Мы будем использовать понятия линий поля и числа их пересечений с поверхностями как наглядный и удобный прием получения формул и соотношений теории векторных полей, а затем используем эти формулы для практических расчетов.

В случае замкнутых поверхностей условились из двух возможных направлений нормали выбирать всегда направление наружу, т. е. использовать внешнюю нормаль (рис. 1.24). Поэтому пересечения при выходе линий на-

ружу будут положительными, а пересечения при входе линий внутрь — отрицательными. В соответствии с этим поток, выходящий из ограниченного поверхностью объема наружу, оказывается положительным, а поток, входящий внутрь, — отрицательным.

Из рис. 1.24 видно, что в случае, когда линии поля проходят внутри замкнутой поверхности, не прерываясь, каждая линия, пересекая поверхность, входить внутрь и выходит наружу одинаковое число раз. В итоге полное число положительных пересечений будет равно полному числу отрицательных пересечений и поток вектора через по-



верхность оказывается равным нулю (см. формулу (1.75)).

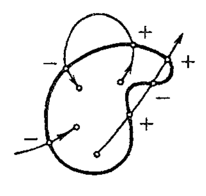


Рис. 1.25

Из рис. 1.25 следует, что линия, начинающаяся внутри замкнутой поверхности, вносит в поток вклад, равный $+1$, а линия, оканчивающаяся внутри поверхности, — вклад, равный -1. Отсюда заключаем, что поток вектора через замкнутую поверхность численно равен разности числа линий, начинающихся внутри поверхности $N_{\text{нач}}$, и числа линий, оканчивающихся внутри поверхности $N_{\text{оканч}}$:

$$\Phi_{\mathbf{a}}(=)N_{\text{нач}} - N_{\text{оканч}}. \qquad (1.76)$$

Отметим, что линии, начинающиеся и оканчивающиеся внутри замкнутой поверхности, вклада в поток не вносят (см. рис. 1.25).

Дивергенция. Рассмотрим точку P, в окрестности которой начинаются (рис. 1.26 *а*) либо оканчиваются (рис. 1.26 *б*) линии поля. Назовем д и в е р г е н ц и е й (от латинского divergentia — расхождение) векторного поля в точке P величину, численно равную плотности точек (т. е. количеству точек, приходящихся на единицу объема), в которых начинаются либо оканчиваются линии поля. В первом случае будем считать дивергенцию положительной, во втором — отрицательной (схождение линий равнозначно отрицательному расхождению). Дивергенцию векторного поля $\mathbf{a}$ обозначают символом $\operatorname{div}\mathbf{a}$ либо $\nabla\mathbf{a}$ (см. формулы (1.103)).

Выделим в окрестности точки P объем V очень малых линейных размеров. Если внутрь этого объема попадает

$N_{нач}$ точек, в которых начинаются линии поля, либо $N_{оканч}$ точек, в которых оканчиваются линии поля, то дивергенция будет равна

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} (=) \frac{N_{нач}}{V} & \quad \text{в первом случае,} \\ \operatorname{div} \mathbf{a} (=) - \frac{N_{оканч}}{V} & \quad \text{во втором случае} \end{aligned} \qquad (1.77)$$

($N_{оканч}$ — положительное число).

Согласно формуле (1.76) $N_{нач}$ в первом случае и $-N_{оканч}$ во втором случае численно равны потоку вектора **a** через ограничивающую объем V поверхность S. Поэтому оба соотношения (1.77) можно представить одной формулой

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\Phi_{\mathbf{a}}}{V}. \qquad (1.78)$$

(В этой формуле левая и правая части имеют одинаковую размерность, поэтому знак равенства не взят в скобки.)

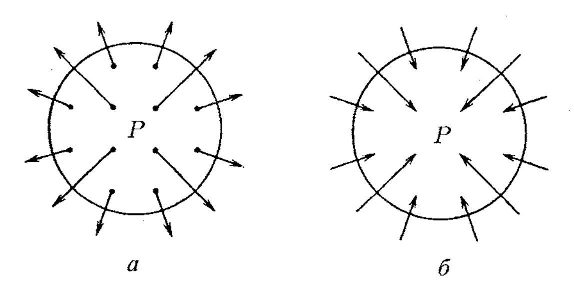


Рис. 1.26

Если точки, в которых начинаются или оканчиваются линии поля, распределены в пространстве неравномерно, то для получения значения дивергенции в точке P нужно взять предел выражения (1.78) при условии, что V стремится к нулю, стягиваясь к точке P. Заменив в дополнение к этому $\Phi_{\mathbf{a}}$ согласно (1.73), придем[8]) к строгому ма-

---

[8]) Кружок у знака интеграла указывает на то, что интегрирование производится по замкнутой поверхности.

тематическому определению дивергенции:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{a}\, d\mathbf{S} \tag{1.79}$$

(S — поверхность, ограничивающая объем V). Дивергенция — скалярная величина, которая может быть как положительной, так и отрицательной.

Точки, в которых начинаются линии поля, естественно назвать источниками поля. Тогда дивергенцию можно трактовать как мощность источников поля, отнесенную к единице объема. Точки, в которых оканчиваются линии поля, называются стоками поля или источниками с отрицательной мощностью.

Из определения (1.79) следует, что дивергенция есть скалярная функция координат, определяющих положения точек в пространстве (кратко — функция точки). Определение (1.79) является самым общим, не зависящим от вида координатной системы.

Найдем выражение для дивергенции в декартовой системе координат. Рассмотрим в окрестности точки $P(x, y, z)$ малый объем в виде параллелепипеда с ребрами, перпендикулярными к координатным осям (рис. 1.27). Поток вектора через поверхность параллелепипеда образуется из потоков, текущих через каждую из шести граней в отдельности.

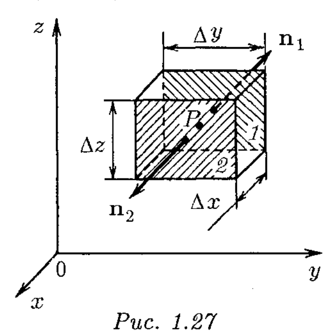


Рис. 1.27

Найдем поток через пару граней, перпендикулярных к оси x (на рис. 1.27 эти грани обозначены косой штриховкой и помечены цифрами *1* и *2*). Внешняя нормаль $\mathbf{n}_2$ к грани *2* совпадает с направлением оси x. Следовательно, для точек этой грани $a_{n_2} = a_x$. Внешняя нормаль $\mathbf{n}_1$ к грани *1* имеет направление, противоположное оси x. Поэтому для точек этой грани $a_{n_1} = -a_x$. Поток через грань *2* можно записать в виде

$$a_{x2} \Delta y \Delta z,$$

где a_{x2} — значение a_x, усредненное по грани *2*. Поток через грань *1* равен

$$-a_{x1} \Delta y \Delta z,$$

где a_{x1} — среднее значение a_x для грани *1*. Суммарный поток через грани *1* и *2* определяется выражением

$$(a_{x2} - a_{x1})\Delta y \Delta z. \tag{1.80}$$

Разность $a_{x2}-a_{x1}$ представляет собой приращение среднего (по грани) значения a_x при смещении вдоль оси x на Δx. Ввиду малости параллелепипеда (напомним, что его размеры стремятся к нулю) это приращение можно представить в виде $(\partial a_x/\partial x)\Delta x$, где значение $\partial a_x/\partial x$ берется в точке P[9]. Тогда (1.80) переходит в

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial a_x}{\partial x}\Delta V.$$

Путем аналогичных рассуждений можно получить для потоков через пары граней, перпендикулярных к осям y и z, выражения

$$\frac{\partial a_y}{\partial y}\Delta V \quad \text{и} \quad \frac{\partial a_z}{\partial z}\Delta V.$$

Таким образом, полный поток через всю замкнутую поверхность определяется выражением

$$\Phi_a = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\Delta V.$$

Разделив это выражение на ΔV, найдем дивергенцию вектора $\mathbf{a}$ в точке $P(x, y, z)$:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{1.81}$$

Теорема Остроградского–Гаусса. Согласно формуле (1.77) выражение $\operatorname{div}\mathbf{a}\,dV$ дает $N_{\text{нач}}$, т. е. число линий поля, начинающихся в объеме dV, либо $-N_{\text{оканч}}$, т. е. взятое со знаком минус число линий поля, оканчивающихся в объеме dV. Следовательно,

$$\int\limits_V \operatorname{div}\mathbf{a}\,dV (=) \int\limits_V dN_{\text{нач}} - \int\limits_V dN_{\text{оканч}} = N_{\text{нач}} - N_{\text{оканч}},$$

[9]) Неточность, которую мы здесь допускаем, исчезает при стягивании объема к точке P, осуществляемом при предельном переходе.

где все три интеграла берутся по одному и тому же конечному объему V. (Мы предполагаем, что дивергенция изменяется при переходе от одной точки поля к другой плавно, без скачков. Тогда в тех элементах объема dV, в которых $dN_{\text{нач}}$ отлично от нуля, $dN_{\text{оканч}}$ будет равно нулю, и наоборот.)

Из формулы (1.77) следует, что правая часть полученного нами соотношения представляет собой поток вектора **a** через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V. Таким образом,

$$\oint_S \mathbf{a}\,d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div}\mathbf{a}\,dV. \qquad (1.82)$$

Это соотношение называют т е о р е м о й О с т р о г р а д с к о г о–Г а у с с а[10]. Интеграл в левой части соотношения вычисляется по произвольной замкнутой поверхности S, интеграл в правой части — по объему V, ограниченному этой поверхностью.

Циркуляция. Обратимся снова к течению идеальной несжимаемой жидкости. Представим себе замкнутую линию — контур Γ. Предположим, что каким-то способом мы заморозим мгновенно жидкость во всем объеме, за исключением очень тонкого замкнутого канала постоянного сечения, включающего в себя контур Γ (рис. 1.28). В зависимости от характера поля вектора скорости жидкость в образовавшемся канале либо окажется неподвижной, либо будет двигаться вдоль контура (циркулировать) в одном из двух возможных направлений. В качестве меры этого движения возьмем величину, равную произведению скорости жидкости в канале на длину контура l. Эту величину назвали ц и р к у л я ц и е й вектора **v** по контуру Γ. Итак,

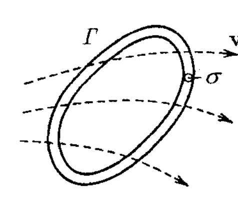


Рис. 1.28

$$\text{циркуляция } \mathbf{v} \text{ по } \Gamma = vl$$

[10]) Михаил Васильевич Остроградский (1801–1862) — русский математик.

Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) — немецкий математик, астроном и физик.

(поскольку канал по предположению имеет постоянное сечение, модуль скорости $v = \text{const}$).

В момент затвердевания стенок у каждой из частиц жидкости в канале будет погашена составляющая скорости, перпендикулярная к стенке, и останется лишь составляющая скорости, касательная к контуру, т. е. v_l. С этой составляющей связан импульс $d\mathbf{p}_l$, модуль которого для частицы жидкости, заключенной в отрезке канала длины dl, имеет величину $\rho\sigma v_l\,dl$ (ρ — плотность жидкости, σ — площадь поперечного сечения канала). Так как жидкость идеальна, действие стенок может изменить лишь направление вектора $d\mathbf{p}_l$, но не его модуль. Взаимодействие между частицами жидкости вызовет такое перераспределение импульса между ними, которое выравнивает скорости всех частиц. При этом алгебраическая сумма тангенциальных составляющих импульсов не может измениться: импульс, приобретаемый одной из взаимодействующих частиц, равен импульсу, теряемому второй частицей. Это означает, что

$$\rho\sigma vl = \oint\limits_{\Gamma} \rho\sigma v_l\,dl,$$

где v — скорость циркуляции, v_l — касательная составляющая скорости жидкости в объеме σdl в момент времени, предшествующий затвердеванию стенок канала[11]. Сократив на $\rho\sigma$, получим, что

$$\text{циркуляция } \mathbf{v} \text{ по } \Gamma = vl = \oint\limits_{\Gamma} v_l\,dl.$$

Аналогично определяется циркуляция любого вектора $\mathbf{a}$ по произвольному замкнутому контуру Γ:

$$\text{циркуляция } \mathbf{a} \text{ по } \Gamma = \oint\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\,d\mathbf{l} = \oint\limits_{\Gamma} a_l\,dl. \tag{1.83}$$

Может показаться, что для отличия циркуляции от нуля векторные линии должны быть замкнутыми или хотя бы как-то изогнутыми в направлении обхода по контуру. Легко убедиться в ошибочности такого предположения. Рассмотрим ламинарное течение жидкости в реке. Скорость

---

[11]) Напомним, что кружок у знака интеграла указывает на то, что интегрирование осуществляется по замкнутому контуру.

жидкости непосредственно у дна равна нулю и возрастает при приближении к поверхности воды (рис. 1.29). Линии тока (линии вектора $\mathbf{v}$) прямолинейны. Несмотря на это, циркуляция вектора $\mathbf{v}$ по изображенному штриховой линией контуру, очевидно, отлична от нуля. Вместе с тем в поле с изогнутыми линиями циркуляция может оказаться равной нулю.

Циркуляция обладает свойством аддитивности. Это означает, что циркуляция по контуру, ограничивающему несколько смежных поверхностей, равна сумме циркуляций

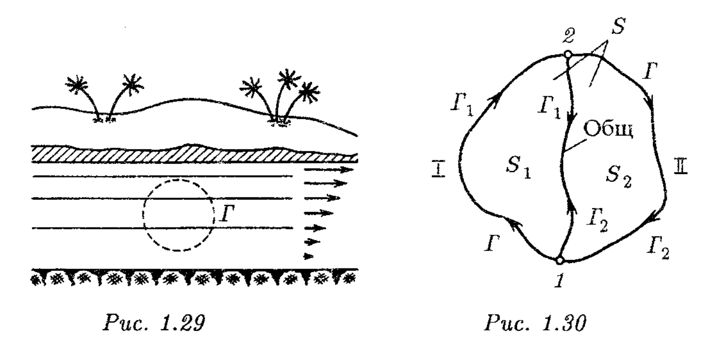


Рис. 1.29 Рис. 1.30

по контурам, ограничивающим каждую из поверхностей в отдельности. Докажем это для случая двух смежных поверхностей (рис. 1.30). Обозначим через Γ_1 контур, ограничивающий поверхность S_1, через Γ_2 — контур, ограничивающий поверхность S_2, и, наконец, через Γ — контур, ограничивающий суммарную поверхность S, равную $S_1 + S_2$.

Циркуляция C_1 по контуру, ограничивающему поверхность S_1, может быть представлена как сумма интегралов:

$$C_1 = \int\limits_{\Gamma_1} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \underset{\text{(I)}}{\oint\limits_{1}^{2}} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} + \underset{\text{(Общ)}}{\int\limits_{2}^{1}} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}. \qquad (1.84)$$

Первый интеграл берется по участку I внешнего контура, второй — по общей границе поверхностей S_1 и S_2 в направлении *2—1*. Аналогично циркуляция C_2 по контуру,

ограничивающему поверхность S_2, равна

$$C_2 = \oint\limits_{\Gamma_2} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \underset{\text{(II)}}{\int\limits_2^1} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} + \underset{\text{(Общ)}}{\int\limits_1^2} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}. \tag{1.85}$$

Первый интеграл берется по участку II внешнего контура, второй — по общей границе поверхностей S_1 и S_2 в направлении *1—2*.

Циркуляция по контуру, ограничивающему суммарную поверхность S, может быть представлена в виде

$$C = \oint\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \underset{\text{(I)}}{\int\limits_1^2} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} + \underset{\text{(II)}}{\int\limits_2^1} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}. \tag{1.86}$$

Вторые слагаемые в выражениях (1.84) и (1.85) различаются только знаком. Поэтому сумма этих выражений оказывается равной выражению (1.86). Таким образом,

$$C = C_1 + C_2. \tag{1.87}$$

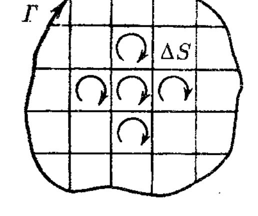


Рис. 1.31

Доказанное соотношение не зависит от формы поверхностей и справедливо при любом числе слагаемых. Следовательно, если разбить произвольную незамкнутую поверхность S на большое число элементарных поверхностей ΔS (рис. 1.31), то циркуляция по контуру, ограничивающему S, может быть представлена как сумма элементарных циркуляций ΔC по контурам, ограничивающим поверхности ΔS:

$$C = \sum \Delta C. \tag{1.88}$$

На рис. 1.31 элементарные поверхности изображены для простоты в виде прямоугольников. В действительности их форма может быть любой.

Ротор. Из свойства аддитивности вытекает, что элементарная циркуляция пропорциональна не длине контура, а поверхности элементарной площадки, охватываемой контуром. Это дает основание утверждать, что циркуляция

порождается на поверхности. Соответственно можно ввести понятие плотности порождения циркуляции, т. е. циркуляции, порождаемой бесконечно малым участком поверхности в расчете на единицу площади этого участка:

$$\text{плотность порождения циркуляции} = \lim_{\triangle S \to 0} \frac{\triangle C}{\triangle S}. \quad (1.89)$$

Величина (1.89), вычисленная для некоторой точки поля P, будет зависеть не только от свойств поля в этой точке, но также и от ориентации в пространстве площадки $\triangle S$, т. е. от ориентации контура, охватывающего $\triangle S$. Эта ориентация может быть задана направлением положительной нормали $\mathbf{n}$ к плоскости контура (положительной считается нормаль, связанная с направлением обхода контура при вычислении циркуляции правилом правого винта). Определяя предел (1.89) в одной и той же точке P для разных направлений $\mathbf{n}$, мы будем получать различные значениям. Выясним связь между этими значениями на простейшем примере.

Напомним, что в однородном поле циркуляция по любому контуру равна нулю. В этом случае постоянный вектор $\mathbf{a}$ в выражении для циркуляции можно вынести за знак интеграла:

$$\oint \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \mathbf{a} \oint d\mathbf{l},$$

а интеграл $\oint d\mathbf{l}$, очевидно, равен нулю.

Плотность порождения циркуляции однородного поля также равна нулю. Поэтому рассмотрим простейшее неоднородное поле, определяемое выражением

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x = ky\mathbf{e}_x, \quad (1.90)$$

где k — константа. У этого поля отлична от нуля только компонента a_x, которая пропорциональна координате y; от других координат эта компонента не зависит. Представим себе в этом поле очень малый (в пределе бесконечно малый) квадратный контур со стороной $2b$ (рис. 1.32). На рис. 1.32 *а* и 1.32 *б* контур лежит в плоскости xy. Положительная нормаль $\mathbf{n}$ и фиксированный орт $\mathbf{e}_\tau$ на рис. 1.32 *а* направлены за чертеж. Цифры в скобках на рис. 1.32 *б* и 1.32 *в* — номера углов квадрата, расположен-

ных за углами, обозначенными цифрами без скобок. При указанной на рис. 1.32*б* ориентации контура циркуляция равна

$$k(y+b)\,2b - k(y-b)\,2b = 4kb^2 = kS,$$

где $S = 4b^2$ — площадь контура. Соответственно плотность порождения циркуляции равна k.

В случае, изображенном на рис. 1.32*в*, циркуляция равна

$$k(y+b\cos\alpha)\,2b - k(y-b\cos\alpha)\,2b = 4kb^2\cos\alpha = kS\cos\alpha,$$

где α — угол между нормалью к контуру и фиксированным ортом $\mathbf{e}_r$. Соответственно плотность порождения циркуляции равна $k\cos\alpha$.

Таким образом, плотность порождения циркуляции ведет себя при вращении контура как проекция вектора $k\mathbf{e}_r$

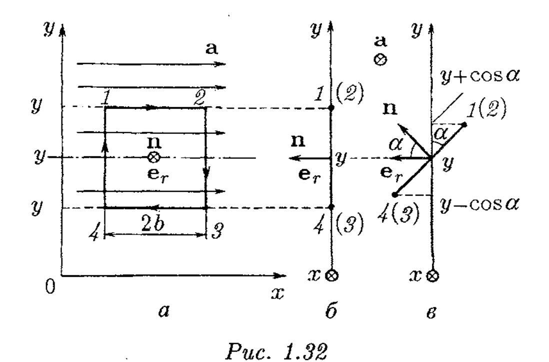


Рис. 1.32

на нормаль к контуру. Этот вектор называют **р о т о р о м** векторного поля и обозначают символом $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ либо $[\nabla\mathbf{a}]$ (см. формулы (1.103)). Модуль ротора равен наибольшему положительному значению плотности порождения циркуляции из всех значений, соответствующих различным ориентациям контура в пространстве.

Итак, плотность порождения циркуляции равна проекции характеризующего поле вектора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ на положительную нормаль к контуру:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})_n = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta S} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint \mathbf{a}\,d\mathbf{l}. \qquad (1.91)$$

Эта формула справедлива не только для рассмотренного нами, но и для любого векторного поля.

В случае поля вектора скорости текущей жидкости (см. § 9.1 кн. 1) наглядное представление о роторе **v** можно получить, представив себе небольшую легкую крыльчатку, помещенную в данную точку жидкости (рис. 1.33). В тех местах, где ротор отличен от нуля, крыльчатка будет вращаться, причем с тем большей скоростью, чем больше проекция ротора на ось крыльчатки.

Выражение (1.91) определяет вектор rot **a**. Это определение является самым общим, не зависящим от вида координатной системы. Для того чтобы найти выражения для проекций вектора rot **a** на оси декартовой системы координат, нужно определить значения величины (1.91) для таких ориентаций площадки S, при которых нормаль **n** к

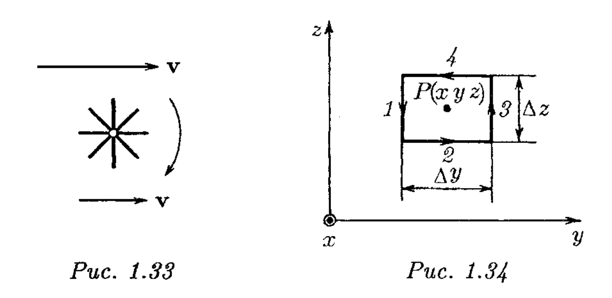


Рис. 1.33 *Рис. 1.34*

площадке совпадает с одной из осей x, y, z. Если, например, направить **n** по оси x, то (1.91) превратится в $(\mathrm{rot}\,\mathbf{a})_x$. Контур Г расположен в этом случае в плоскости, параллельной координатной плоскости yz. Возьмем этот контур в виде прямоугольника со сторонами Δy и Δz (рис. 1.34); ось x имеет на этом рисунке направление на нас; указанное на рисунке направление обхода связано с направлением оси x правилом правого винта). Участок *1* контура противоположен по направлению оси z. Поэтому a_l на этом участке совпадает с $-a_z$. Рассуждая аналогично, найдем, что a_l на участках *2*, *3* и *4* равна соответственно a_y, a_z и $-a_y$. Следовательно, циркуляцию можно представить в виде

$$(a_{z3} - a_{z1})\Delta z - (a_{y4} - a_{y2})\Delta y, \qquad (1.92)$$

где a_{z3} и a_{z1} — средние значения a_z на участках *3* и *1* соответственно, a_{y4} и a_{y2} — средние значения a_y на участках *4* и *2*.

Разность $a_{z3}-a_{z1}$ представляет собой приращение среднего значения a_z на отрезке Δz при смещении этого отрезка в направлении оси y на Δy. Ввиду малости Δy и Δz это приращение можно представить в виде $(\partial a_z/\partial y)\Delta y$, где значение $\partial a_z/\partial y$ берется в точке P [12]), Аналогично разность $a_{y4}-a_{y2}$ можно представить в виде $(\partial a_y/\partial z)\Delta z$. Подставив эти выражения в (1.92) и вынеся общий множитель за скобки, получим для циркуляции выражение

$$\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\Delta y\Delta z=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\Delta S,$$

где ΔS — площадь контура. Разделив циркуляцию на ΔS, найдем выражение для проекции $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ на ось x:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})_x=\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}. \qquad (1.93)$$

Путем аналогичных рассуждений можно найти, что

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})_y=\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}, \qquad (1.94)$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})_z=\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}. \qquad (1.95)$$

Легко убедиться в том, что любое из выражений (1.93)–(1.95) может быть получено из предыдущего (для (1.93) предыдущим следует считать (1.95)) путем так называемой циклической перестановки координат, т. е. замены координат, осуществляемой по схеме

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ \nearrow & & \searrow \\ z & \longleftarrow & y \end{array}$$

Итак, ротор вектора **a** определяется в декартовой системе координат следующим выражением:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}=\mathbf{e}_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\mathbf{e}_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\mathbf{e}_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right). \qquad (1.96)$$

---

[12]) Неточность, которую мы при этом допускаем, исчезает при стягивании контура к точке P, осуществляемом при переходе к пределу.

Ниже мы укажем более изящный способ записи этого выражения.

Теорема Стокса. Зная ротор вектора **a** в каждой точке некоторой (не обязательно плоской) поверхности S, можно вычислить циркуляцию этого вектора по контуру Г, ограничивающему S (контур также может быть неплоским). Для этого разобьем поверхность на очень малые элементы $\triangle S$. Ввиду их малости эти элементы можно считать плоскими. Поэтому в соответствии с (1.91) циркуляция вектора **a** по контуру, ограничивающему $\triangle S$, может быть представлена в виде

$$\triangle C \approx (\mathrm{rot}\,\mathbf{a})_n \triangle S = \mathrm{rot}\,\mathbf{a} \cdot \triangle \mathbf{S}, \tag{1.97}$$

где **n** — положительная нормаль к элементу поверхности $\triangle S$.

В соответствии с формулой (1.88), просуммировав выражение (1.97) по всем $\triangle S$, получим циркуляцию вектора **a** по контуру Г, ограничивающему S:

$$C = \sum \triangle C \approx \sum \mathrm{rot}\,\mathbf{a} \cdot \triangle \mathbf{S}.$$

Осуществив предельный переход, при котором все $\triangle S$ стремятся к нулю (число их при этом неограниченно растет), придем к формуле

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \int_{S} \mathrm{rot}\,\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}. \tag{1.98}$$

Соотношение (11.32) носит название теоремы Стокса. Смысл ее состоит в том, что *циркуляция вектора* **a** *по произвольному контуру* Г *равна потоку вектора* rot **a** *через произвольную поверхность* S, *ограниченную данным контуром.*

Из теоремы Стокса следует, что ротор соотносится с циркуляцией подобно тому, как дивергенция соотносится с потоком: дивергенция порождает поток, ротор порождает циркуляцию.

Оператор набла. Написание формул векторного анализа значительно упрощается и облегчается, если ввести векторный дифференциальный оператор, обозначаемый символом ∇ (набла) и носящий название оператора набла или оператора Гамильтона[13]). Под этим оператором подразумевается вектор с компонентами

[13]) Уильям Роуан Гамильтон (1805–1865) — ирландский математик.

$\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$. Следовательно,

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.99}$$

Сам по себе этот вектор смысла не имеет. Он приобретает смысл в сочетании со скалярной или векторной функцией, на которую он символически умножается. Так, если умножить вектор ∇ на скаляр φ, то получится вектор

$$\nabla\varphi = \mathbf{e}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{1.100}$$

который представляет собой градиент функции φ (см. (1.67)).

Если вектор ∇ умножить скалярно на вектор $\mathbf{a}$, получится скаляр

$$\nabla\mathbf{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \tag{1.101}$$

который есть не что иное, как дивергенция вектора $\mathbf{a}$ (см. (1.81)).

Наконец, если умножить ∇ на вектор $\mathbf{a}$ векторно, получится вектор с компонентами: $[\nabla\mathbf{a}]_x = \nabla_y a_z - \nabla_z a_y = \partial a_z/\partial y - \partial a_y/\partial z$ и т. д., которые совпадают с компонентами $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ (см. (1.93)–(1.95)). Следовательно, воспользовавшись записью векторного произведения с помощью определителя, можно написать

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = [\nabla\mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \tag{1.102}$$

Таким образом, существует два способа обозначений градиента, дивергенции и ротора:

$$\nabla\varphi \equiv \operatorname{grad}\varphi, \qquad \nabla\mathbf{a} \equiv \operatorname{div}\mathbf{a}, \qquad [\nabla\mathbf{a}] \equiv \operatorname{rot}\mathbf{a}. \tag{1.103}$$

Обозначения с помощью ∇ обладают рядом преимуществ. Поэтому мы в дальнейшем будем применять такие обозначения. Следует приучить себя отождествлять символ $\nabla\varphi$ со словами «градиент фи» (т. е. говорить не «набла фи», а «градиент фи»), символ $\nabla\mathbf{a}$ — со словами «дивергенция а» и, наконец, символ $[\nabla\mathbf{a}]$ — со словами «ротор а».

Пользуясь вектором ∇, нужно помнить, что он является дифференциальным оператором, действующим на все функции, стоящие справа от него. Поэтому при преобразовании выражений, в которые входит ∇, нужно учитывать как правила векторной алгебры, так и правила дифференциального исчисления. Например, производная произведения функций φ и ψ равна $(\varphi\psi)' = \varphi'\psi + \varphi\psi'$. В соответствии с этим

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi = \psi \operatorname{grad}\varphi + \varphi \operatorname{grad}\psi. \tag{1.104}$$

Аналогично

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{a}) = \nabla(\varphi\mathbf{a}) = \mathbf{a}\nabla\varphi + \varphi\nabla\mathbf{a} = \mathbf{a}\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{div}\mathbf{a}. \tag{1.105}$$

Градиент некоторой функции φ представляет собой векторную функцию. Поэтому к нему могут быть применены операции дивергенции и ротора:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla(\nabla\varphi) = (\nabla\nabla)\varphi = (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2)\varphi = \\ = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi \tag{1.106}$$

(Δ — оператор Лапласа);

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = [\nabla, \nabla\varphi] = [\nabla\nabla]\varphi = 0 \tag{1.107}$$

(напомним, что векторное произведение вектора на самого себя равно нулю).

Применим операции дивергенции и ротора к функции $\operatorname{rot}\mathbf{a}$:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla[\nabla\mathbf{a}] = 0 \tag{1.108}$$

(смешанное произведение векторов равно объему параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах [14]); если два из этих векторов совпадают, объем параллелепипеда равен нулю);

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = [\nabla, [\nabla\mathbf{a}]] = \nabla(\nabla\mathbf{a}) - (\nabla\nabla)\mathbf{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a} \tag{1.109}$$

[14]) См. § 1.2 кн. 1.

(мы воспользовались формулой $[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$). Соотношение (1.108) означает, что поле ротора не имеет источников. Следовательно, линии вектора $[\nabla\mathbf{a}]$ не имеют ни начала, ни конца. Именно по этой причине поток ротора через любую поверхность S, опирающуюся на данный контур Г, оказывается одним и тем же (см. формулу (1.98)).

В заключение отметим, что с использованием оператора ∇ формулам (1.82) и (1.98) можно придать вид

$$\oint_S \mathbf{a}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla\mathbf{a}\cdot dV \text{ (теорема Остроградского–Гаусса)}, \tag{1.110}$$

$$\oint_\Gamma \mathbf{a}\cdot d\mathbf{l} = \int_S [\nabla\mathbf{a}]\cdot d\mathbf{S} \quad \text{(теорема Стокса)}. \tag{1.111}$$

1.12. Циркуляция и ротор электростатического поля

В § 1.6 мы выяснили, что силы, действующие на заряд q в электростатическом поле, являются консервативными. Следовательно, работа этих сил на любом замкнутом пути Г равна нулю:

$$A = \oint_\Gamma q\mathbf{E}\,d\mathbf{l} = 0.$$

Сократив на q, получим соотношение

$$\oint_\Gamma \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = 0 \tag{1.112}$$

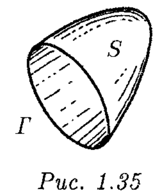


Рис. 1.35

(ср. с (1.45)). Интеграл, стоящий в левой части формулы (1.112), представляет собой циркуляцию вектора **E** по контуру Г (см. (1.83)).

Таким образом, характерным для электростатического поля является то обстоятельство, что циркуляция вектора напряженности этого поля по любому замкнутому контуру равна нулю.

Возьмем произвольную поверхность S, опирающуюся на контур Г, для которого вычисляется циркуляция (рис. 1.35). Согласно теореме Стокса (см. (1.111)) интеграл от ротора **E**, взятый по этой поверхности, равен

циркуляции вектора $\mathbf{E}$ по контуру Γ:

$$\int\limits_S [\nabla \mathbf{E}]\, d\mathbf{S} = \oint\limits_\Gamma \mathbf{E}\, d\mathbf{l}. \qquad (1.113)$$

Поскольку циркуляция равна нулю, мы приходим к выводу, что

$$\int\limits_S [\triangle \mathbf{E}]\, d\mathbf{S} = 0.$$

Полученное условие должно выполняться для любой поверхности S, опирающейся на произвольный контур Γ. Это возможно лишь в том случае, если ротор вектора $\mathbf{E}$ в каждой точке поля равен нулю:

$$[\nabla \mathbf{E}] = 0. \qquad (1.114)$$

По аналогии с крыльчаткой, изображенной на рис. 1.33, представим себе «электрическую крыльчатку» в виде легкой втулки со спицами, на концах которых помещаются одинаковые по величине положительные заряды q (рис. 1.36; все устройство должно быть малых размеров). В тех местах электрического поля, где ротор $\mathbf{E}$ отличен от нуля, такая крыльчатка вращалась бы с тем большим ускорением, чем больше проекция ротора на ось крыльчатки. В случае электростатического поля такое воображаемое устройство не пришло бы во вращение при любой ориентации его оси.

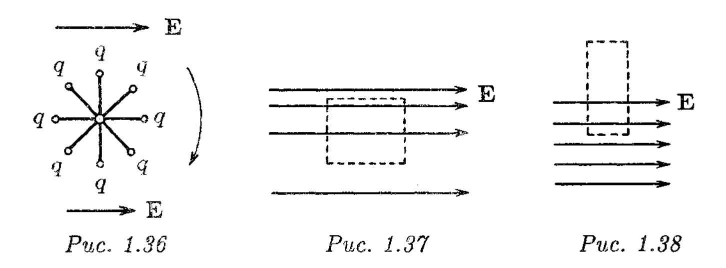


Рис. 1.36 Рис. 1.37 Рис. 1.38

Итак, отличительной особенностью электростатического поля является то, что оно безвихревое. В предыдущем параграфе мы выяснили, что ротор градиента скалярной функции равен нулю (см. формулу (1.107)). Поэтому равенство нулю ротора $\mathbf{E}$ в каждой точке поля делает возмож-

ным представление **E** в виде градиента скалярной функции φ, называемой потенциалом. Такое представление уже было рассмотрено в § 1.8 (см. формулу (1.40); знак минус в этой формуле взят из физических соображений).

Из необходимости соблюдения условия (1.112) можно сразу заключить, что существование электростатического поля вида, показанного на рис. 1.37, невозможно. Действительно, для такого поля циркуляция по контуру, изображенному штриховой линией, была бы отлична от нуля, что противоречит условию (1.112). Точно так же невозможно, чтобы поле, отличное от нуля в ограниченном объеме, было во всем этом объеме однородным (рис. 1.38). В этом случае циркуляция по контуру, показанному штриховой линией, была бы отлична от нуля.

1.13. Теорема Гаусса

В предыдущем параграфе мы выяснили, чему равен ротор электростатического поля. Теперь найдем дивергенцию поля. С этой целью рассмотрим поле точечного заряда q и вычислим поток вектора **E** через замкнутую поверхность S, заключающую в себе заряд (рис. 1.39). В § 1.5 мы показали, что количество линий вектора **E**, начинающихся на точечном заряде $+q$ или заканчивающихся на заряде $-q$, численно равно q/ε_0.

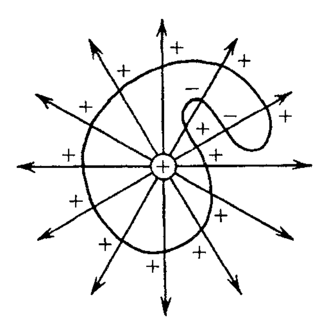


Рис. 1.39

Согласно формуле (1.76) поток вектора **E** через любую замкнутую поверхность равен числу линий, выходящих наружу, т. е. начинающихся на заряде, если он положителен, и числу линий, входящих внутрь, т. е. оканчивающихся на заряде, если он отрицателен. Учтя, что количество начинающихся или оканчивающихся на точечном заряде линий численно равно q/ε_0, можно написать, что

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (1.115)$$

Знак потока совпадает со знаком заряда q. Размерность обеих частей равенства (1.115) одинакова.

Теперь допустим, что внутри замкнутой поверхности находятся N точечных зарядов q_1, q_2, ..., q_N. В силу принципа суперпозиции напряженность $\mathbf{E}$ поля, создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряженностей $\mathbf{E}_i$, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i$. Поэтому

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = \oint_S \left(\sum_i \mathbf{E}_i\right) d\mathbf{S} = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i\, d\mathbf{S}.$$

Каждый из интегралов, стоящих под знаком суммы, равен q_i/ε_0. Следовательно,

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i. \tag{1.116}$$

Доказанное нами утверждение носит название теоремы Гаусса. Эта теорема гласит, что *поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на* ε_0.

При рассмотрении полей, создаваемых макроскопическими зарядами (т. е. зарядами, образованными огромным числом элементарных зарядов), отвлекаются от дискретной (прерывистой) структуры этих зарядов и считают их распределенными в пространстве непрерывным образом с конечной всюду плотностью. Объемная плотность заряда ρ определяется по аналогии с плотностью массы как отношение заряда dq к физически бесконечно малому объему dV, в котором заключен этот заряд:

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \tag{1.117}$$

В данном случае под физически бесконечно малым объемом нужно понимать такой объем, который, с одной стороны, достаточно мал для того, чтобы плотность в пределах его можно было считать одинаковой, а с другой стороны, достаточно велик для того, чтобы не могла проявиться дискретность заряда.

Зная плотность заряда в каждой точке пространства, можно найти суммарный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности S. Для этого нужно вычислить ин-

теграл от ρ по объему, ограниченному поверхностью:

$$\sum q_i = \int_V \rho\, dV.$$

Таким образом, формуле (1.116) можно придать вид

$$\oint_S \mathbf{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\, dV. \qquad (1.118)$$

Заменив в соответствии с (1.110) поверхностный интеграл объемным, получим

$$\int_V \nabla\mathbf{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\, dV.$$

Соотношение, к которому мы пришли, должно выполняться для любого произвольно выбранного объема V. Это возможно лишь в том случае, если значения подынтегральных функций в каждой точке пространства одинаковы. Следовательно, дивергенция вектора **E** связана с плотностью заряда в той же точке равенством

$$\nabla\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \qquad (1.119)$$

Это равенство выражает теорему Гаусса в дифференциальной форме.

В случае текущей жидкости $\nabla\mathbf{v}$ дает удельную мощность источников жидкости в данной точке. По аналогии говорят, что заряды являются источниками электрического поля.

1.14. Вычисление полей с помощью теоремы Гаусса

Теорема Гаусса позволяет в ряде случаев найти напряженность поля гораздо более простыми средствами, чем с использованием формулы (1.15) для напряженности поля точечного заряда и принципа суперпозиции полей. Продемонстрируем возможности теоремы Гаусса на нескольких полезных для дальнейшего примерах. Прежде чем приступить к рассмотрению этих примеров, введем понятия поверхностной и линейной плотностей заряда.

Если заряд сосредоточен в тонком поверхностном слое несущего заряд тела, распределение заряда в пространст-

ве можно охарактеризовать с помощью поверхностной плотности σ, которая определяется выражением

$$\sigma = \frac{dq}{dS}. \tag{1.120}$$

Здесь dq — заряд, заключенный в слое площади dS. Под dS подразумевается физически бесконечно малый участок поверхности.

Если заряд распределен по объему или поверхности цилиндрического тела (равномерно в каждом сечении), используется линейная плотность заряда

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \tag{1.121}$$

(dl — длина физически бесконечно малого отрезка цилиндра, dq — заряд, сосредоточенный на этом отрезке).

Поле бесконечной однородно заряженной плоскости. Пусть поверхностная плотность заряда во всех точках плоскости одинакова и равна σ; для определенности будем считать заряд положительным. Из соображений симметрии вытекает, что напряженность поля в любой точке имеет направление, перпендикулярное к плоскости. Действительно, поскольку плоскость бесконечна и заряжена однородно, нет никаких оснований к тому, чтобы вектор **E** отклонялся в какую-либо сторону от нормали к плоскости. Далее очевидно, что в симметричных относительно плоскости точках напряженность поля одинакова по модулю и противоположна по направлению.

Представим себе мысленно цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными к плоскости, и основаниями ΔS, расположенными относительно плоскости симметрично (рис. 1.40). В силу симметрии $E' = E'' = E$. Применим к поверхности теорему Гаусса. Поток через боковую часть поверхности будет отсутствовать, поскольку E_n в каждой ее точке равна нулю. Для оснований E_n совпадает с E. Следовательно, суммарный поток через поверхность равен $2E\Delta S$. Внутри поверхности заключен заряд $\sigma\Delta S$. Согласно теореме Гаусса должно выполняться условие

$$2E\Delta S = \sigma\Delta S/\varepsilon_0,$$

из которого

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{1.122}$$

Полученный нами результат не зависит от длины цилиндра. Это означает, что на любых расстояниях от плоскости напряженность поля одинакова. Вид линий

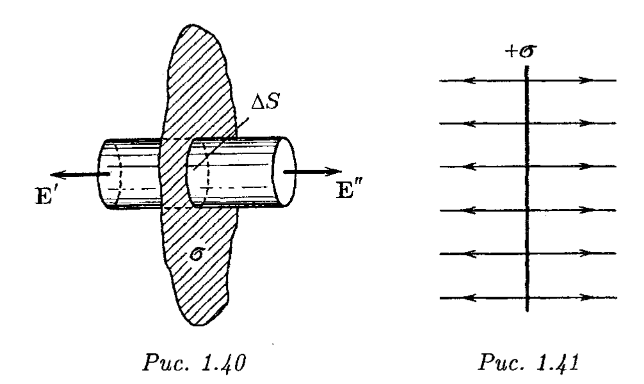


Рис. 1.40 *Рис. 1.41*

напряжености показан на рис. 1.41. Для отрицательно заряженной плоскости результат будет таким же, лишь направление вектора **E** и линий напряженности изменится на обратное.

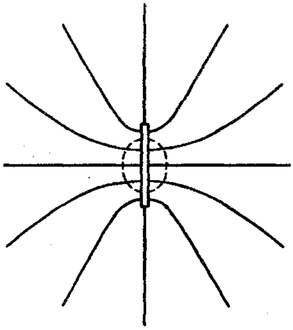


Рис. 1.42

Если взять плоскость конечных размеров, например заряженную тонкую пластинку [15]), то полученный выше результат будет справедливым только для точек, расстояние которых от края пластинки значительно превышает расстояние от самой пластинки (на рис. 1.42 область этих точек обведена штриховой кривой). По мере удаления от плоскости или приближения к ее краям поле будет все больше отличаться от поля бесконечной заряженной плоскости. Характер поля на больших расстояниях легко представить, если учесть, что на расстояниях, значительно превышающих размеры пластинки, созда-

---

[15]) В случае пластинки под σ в формуле (1.122) следует понимать заряд, сосредоточенный на 1 м^2 пластинки по всей ее толщине. У металлических тел заряд распределяется по внешней поверхности. Поэтому под σ нужно подразумевать удвоенную величину плотности заряда на ограничивающих металлическую пластинку поверхностях.

ваемое ею поле можно рассматривать как поле точечного заряда.

Поле двух разноименно заряженных плоскостей. Поле двух параллельных бесконечных плоскостей, заряженных разноименно с одинаковой по абсолютной величине поверхностной плотностью σ, можно найти как суперпозицию полей, создаваемых каждой из плоскостей в отдельности (рис. 1.43). В области между плоскостями складываемые поля имеют одинаковое направление, так что результирующая напряженность равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{1.123}$$

Вне объема, ограниченного плоскостями, складываемые поля имеют противоположные направления, так что результирующая напряженность равна нулю.

Таким образом, поле оказывается сосредоточенным между плоскостями. Напряженность поля во всех точках этой области одинакова; следовательно, поле однородно. Линии напряженности представляют собой совокупность параллельных равноотстоящих прямых. Полученный ре-

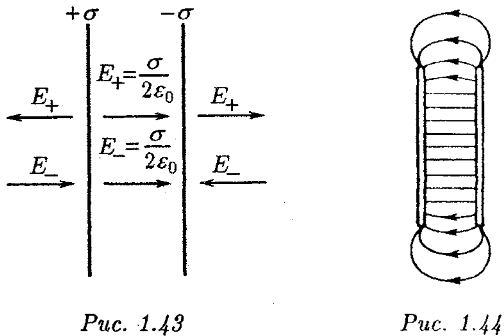


Рис. 1.43 Рис. 1.44

зультат приближенно справедлив и для плоскостей конечных размеров, если расстояние между плоскостями много меньше их линейных размеров (плоский конденсатор). В этом случае заметные отклонения поля от однородности наблюдаются только вблизи краев пластин (рис. 1.44).

Поле бесконечного заряженного цилиндра. Пусть поле создается бесконечной цилиндрической поверхностью радиуса R, заряженной с постоянной поверхностной плот-

ностью σ. Из соображений симметрии следует, что напряженность поля в любой точке должна быть направлена вдоль радиальной прямой, перпендикулярной к оси цилиндра, а модуль напряженности может зависеть только от расстояния r от оси цилиндра. Представим себе мысленно коаксиальную с заряженной поверхностью замкнутую цилиндрическую поверхность радиуса r и высоты h (рис. 1.45). Для оснований цилиндра $E_n = 0$, для боковой поверхности $E_n = E(r)$ (заряд предполагаем положительным). Следовательно, поток вектора $\mathbf{E}$ через рассматриваемую поверхность равен $E(r) \cdot 2\pi rh$. Если $r > R$, внутрь поверхности попадает заряд $q = \lambda h$ (λ — линейная плотность заряда, **равная** $\sigma \cdot 2\pi R$). Применив теорему Гаусса, получим

$$E(r) \cdot 2\pi rh = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r} \quad (r \geq R). \tag{1.124}$$

Если $r < R$, рассматриваемая замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, вследствие чего $E(r) = 0$.

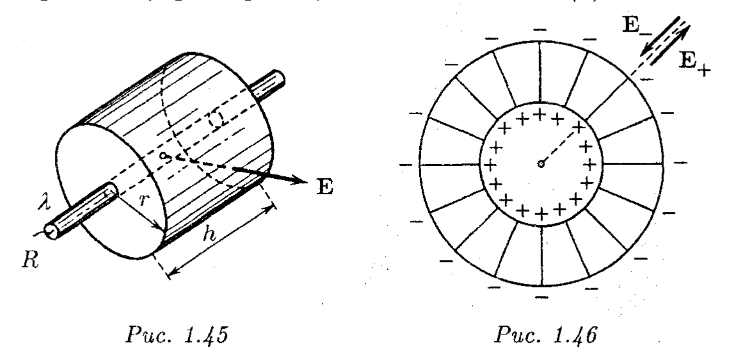


Рис. 1.45 *Рис. 1.46*

Таким образом, внутри равномерно заряженной цилиндрической поверхности бесконечной длины поле отсутствует. Напряженность поля вне поверхности определяется линейной плотностью заряда λ и расстоянием r от оси цилиндра.

Поле отрицательно заряженного цилиндра отличается от поля цилиндра, заряженного положительно, только направлением вектора $\mathbf{E}$.

Из формулы (1.124) следует, что уменьшая радиус цилиндра R (при неизменной линейной плотности заряда λ), можно получить вблизи поверхности цилиндра поле с очень большой напряженностью.

Подставив в (1.124) $\lambda = 2\pi R\sigma$ и положив $r = R$, получим для напряженности поля в непосредственной близости к поверхности цилиндра значение

$$E(R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{1.125}$$

С помощью принципа суперпозиции легко найти поле двух коаксиальных цилиндрических поверхностей, заряженных с одинаковой по абсолютной величине, но различающейся знаком линейной плотностью λ (рис. 1.46). Внутри меньшего и вне большего цилиндров поле отсутствует. В зазоре между цилиндрами напряженность поля определяется формулой (1.124). Это справедливо и для цилиндрических поверхностей конечной длины, если зазор между поверхностями много меньше их длины (цилиндрический конденсатор). Заметные отступления от поля поверхностей бесконечной длины будут наблюдаться только вблизи краев цилиндров.

Поле заряженной сферической поверхности. Поле, создаваемое сферической поверхностью радиуса R, заряженной с постоянной поверхностной плотностью σ, будет, очевидно, центрально-симметричным. Это означает, что направление вектора $\mathbf{E}$ в любой точке проходит через центр сферы, а модуль напряженности является функцией расстояния r от центра сферы. Вообразим концентрическую с заряженной сферой поверхность радиуса r. Для всех точек этой поверхности $E_n = E(r)$. Если $r > R$, внутрь поверхности попадает весь заряд q, распределенный по сфере. Следовательно,

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad (r \geq R). \tag{1.126}$$

Сферическая поверхность радиуса r, меньшего, чем R, не будет содержать зарядов, вследствие чего для $r < R$ получается $E(r) = 0$.

Таким образом, внутри сферической поверхности, заряженной с постоянной поверхностной плотностью σ, поле отсутствует. Вне этой поверхности поле тождественно с полем точечного заряда той же величины, помещенного в центр сферы.

Используя принцип суперпозиции, легко показать, что поле двух концентрических сферических поверхностей (сферический конденсатор), несущих одинаковые по абсолютной величине и противоположные по знаку заряды $+q$ и $-q$, сосредоточено в зазоре между поверхностями, причем модуль напряженности поля в этом зазоре определяется формулой (1.126).

Поле объемно-заряженного шара. Пусть шар радиуса R заряжен с постоянной объемной плотностью ρ. Поле в этом случае обладает центральной симметрией. Легко сообразить, что для поля вне шара получается тот же результат (см. формулу (1.126)), что и в случае поверхностно-заряженной сферы. Однако для точек внутри шара результат будет иным. Сферическая поверхность радиуса r ($r < R$) заключает в себе заряд, равный $\rho \cdot (4/3)\pi r^3$. Поэтому теорема Гаусса для такой поверхности запишется следующим образом:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Отсюда, заменив ρ на $q/((4/3)\pi R^3)$, получим

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}r \quad (r \le R). \tag{1.127}$$

Таким образом, внутри шара напряженность поля растет линейно с расстоянием r от центра шара. Вне шара напряженность убывает по такому же закону, как и у поля точечного заряда.

Глава 2

Электрическое поле в диэлектриках

2.1. Полярные и неполярные молекулы

Диэлектриками (или изоляторами) называются вещества, не способные проводить электрический ток. Идеальных изоляторов в природе не существует. Все вещества хотя бы в ничтожной степени проводят электрический ток. Однако вещества, называемые диэлектриками, проводят ток в 10^{15}–10^{20} раз хуже, чем вещества, называемые проводниками.

Если диэлектрик внести в электрическое поле, то это поле и сам диэлектрик претерпевают существенные изменения. Чтобы понять, почему это происходит, нужно учесть, что в составе атомов и молекул имеются положительно заряженные ядра и отрицательно заряженные электроны.

Всякая молекула представляет собой систему с суммарным зарядом, равным нулю. Линейные размеры этой системы очень малы (порядка нескольких ангстрем[1]). В § 1.10 мы установили, что поле, создаваемое подобной системой, определяется модулем и ориентацией дипольного электрического момента

$$\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{r}_i \tag{2.1}$$

(суммирование производится как по электронам, так и по ядрам). Правда, электроны в молекуле движутся так, что этот момент все время изменяется. Однако скорости электронов столь велики, что практически обнаруживается среднее по времени значение момента (2.1). Поэтому в дальнейшем под дипольным моментом молекулы мы будем подразумевать величину

$$\mathbf{p} = \sum q_i \langle \mathbf{r}_i \rangle \tag{2.2}$$

---

[1]) Ангстрем (Å) — очень удобная в атомной физике единица длины, равная 10^{-10} м.

(для ядер в этой сумме в качестве $\langle \mathbf{r}_i \rangle$ берется просто $\mathbf{r}_i$). Иначе говоря, мы будем считать, что электроны находятся относительно ядер в покое в некоторых точках, полученных усреднением положений электронов по времени.

Поведение молекулы во внешнем электрическом поле также определяется ее дипольным моментом. В этом можно убедиться, вычислив потенциальную энергию молекулы во внешнем электрическом поле. Выбрав начало координат внутри молекулы и воспользовавшись малостью $\langle \mathbf{r}_i \rangle$, представим потенциал в той точке, где находится i-й заряд, в виде

$$\varphi_i = \varphi + \nabla\varphi \cdot \langle \mathbf{r}_i \rangle,$$

где φ — потенциал в начале координат (см. формулу (1.68)). Тогда

$$W_{\text{п}} = \sum q_i \varphi_i = \sum q_i(\varphi + \nabla\varphi \cdot \langle \mathbf{r}_i \rangle) = \\ = \varphi \sum q_i + \nabla\varphi \sum q_i \langle \mathbf{r}_i \rangle.$$

Учтя, что $\sum q_i = 0$, и заменив $\nabla\varphi$ на $-\mathbf{E}$, получим

$$W_{\text{п}} = -\mathbf{E} \sum q_i \langle \mathbf{r}_i \rangle = -\mathbf{pE} = -pE\cos\alpha.$$

Продифференцировав это выражение по α, получим для вращательного момента выражение (1.56); взяв производную по x, придем к силе (1.61).

Таким образом, молекула как в отношении создаваемого ею поля, так и в отношении испытываемых ею во внешнем поле сил эквивалентна диполю. Положительный заряд этого диполя равен суммарному заряду ядер и помещается в «центре тяжести» положительных зарядов; отрицательный заряд равен суммарному заряду электронов и помещается в «центре тяжести» отрицательных зарядов.

У симметричных молекул (таких как H_2, O_2, N_2) в отсутствие внешнего электрического поля центры тяжести положительных и отрицательных зарядов совпадают. Такие молекулы не обладают собственным дипольным моментом и называются неполярными. У несимметричных молекул (таких, например, как CO, NH, HCl и т. п.) центры тяжести зарядов разных знаков сдвинуты относительно друг друга. В этом случае молекулы обладают собственным дипольным моментом и называются полярными.

Под действием внешнего электрического поля заряды в неполярной молекуле смещаются относительно друг друга: положительные по направлению поля, отрицательные против поля. В результате молекула приобретает дипольный момент, модуль которого, как показывает опыт, пропорционален напряженности поля. В рационализованной системе коэффициент пропорциональности записывают в виде $\varepsilon_0\beta$, где ε_0 — электрическая постоянная, а β — величина, называемая *поляризуемостью молекулы*. Учтя, что направления $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}$ совпадают, можно написать

$$\mathbf{p} = \beta\varepsilon_0\mathbf{E}. \tag{2.3}$$

Дипольный момент имеет размерность, равную $[q]\mathrm{L}$. Согласно формуле (1.15) размерность $\varepsilon_0\mathbf{E}$ равна $[q]\mathrm{L}^{-2}$. Следовательно, поляризуемость молекулы β обладает размерностью L^3.

Процесс поляризации неполярной молекулы протекает так, как если бы положительные и отрицательные заряды молекулы были связаны друг с другом упругими силами. Поэтому говорят, что неполярная молекула ведет себя во внешнем поле как упругий диполь.

Действие внешнего поля на полярную молекулу сводится в основном к стремлению повернуть молекулу так, чтобы ее дипольный момент установился по направлению поля. На дипольный момент внешнее поле практически не влияет. Следовательно, полярная молекула ведет себя во внешнем поле как жесткий диполь.

2.2. Поляризация диэлектриков

Обычно в отсутствие внешнего электрического поля дипольные моменты молекул диэлектрика либо равны нулю (неполярные молекулы), либо распределены по направлениям в пространстве хаотическим образом (полярные молекулы). В обоих случаях суммарный дипольный момент диэлектрика равен нулю[2]).

Под действием внешнего поля диэлектрик поляризуется. Это означает, что результирующий дипольный момент диэлектрика становится отличным от нуля. В качестве величины, характеризующей степень поляризации диэлектрика, естественно взять дипольный момент еди-

---

[2]) В § 2.9 мы познакомимся с веществами, которые могут обладать дипольным моментом в отсутствие внешнего поля.

ницы объема. Если поле или диэлектрик (или оба они) неоднородны, степень поляризации в разных точках диэлектрика будет различна. Чтобы охарактеризовать поляризацию в данной точке, нужно выделить заключающий в себе эту точку физически бесконечно малый объем ΔV, найти сумму $\sum_{\Delta V} \mathbf{p}$ моментов заключенных в этом объеме молекул и взять отношение

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \mathbf{p}. \tag{2.4}$$

Векторная величина $\mathbf{P}$, определяемая формулой (2.4), называется поляризованностью диэлектрика.

Дипольный момент $\mathbf{p}$ имеет размерность $[q]\mathrm{L}$. Следовательно, размерность $\mathbf{P}$ равна $[q]\mathrm{L}^{-2}$, т. е. совпадает с размерностью $\varepsilon_0\mathbf{E}$ (см. формулу (1.15)).

У изотропных диэлектриков любого типа поляризованность связана с напряженностью поля в той же точке простым соотношением

$$\mathbf{P} = \varkappa\varepsilon_0\mathbf{E}, \tag{2.5}$$

где $\varkappa$ — не зависящая от $\mathbf{E}$ величина, называемая диэлектрической восприимчивостью диэлектрика[3]). Выше было указано, что размерности $\mathbf{P}$ и $\varepsilon_0\mathbf{E}$ одинаковы. Следовательно, $\varkappa$ — безразмерная величина.

В гауссовой системе формула (2.5) имеет вид

$$\mathbf{P} = \varkappa\mathbf{E}. \tag{2.6}$$

Для диэлектриков, построенных из неполярных молекул, формула (2.5) вытекает из следующих простых соображений. В пределы объема ΔV попадает количество молекул, равное $n\Delta V$, где n — число молекул в единице

---

[3]) В анизотропных диэлектриках направления $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$, вообще говоря, не совпадают. В этом случае связь между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ описывается формулами

$$P_x = \varepsilon_0(\varkappa_{xx}E_x + \varkappa_{xy}E_y + \varkappa_{xz}E_z),$$
$$P_y = \varepsilon_0(\varkappa_{yx}E_x + \varkappa_{yy}E_y + \varkappa_{yz}E_z),$$
$$P_z = \varepsilon_0(\varkappa_{zx}E_x + \varkappa_{zy}E_y + \varkappa_{zz}E_z).$$

Совокупность девяти величин $\varkappa_{ik}$ образует симметричный тензор 2-го ранга, называемый тензором диэлектрической восприимчивости (ср. с формулой (40.3) кн. 1). Этот тензор характеризует электрические свойства анизотропного диэлектрика.

объема. Каждый из моментов **p** определяется в этом случае формулой (2.3). Следовательно,

$$\sum_{\Delta V} \mathbf{p} = n\Delta V \beta\varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Разделив это выражение на ΔV, получим поляризованность $\mathbf{P} = n\beta\varepsilon_0\mathbf{E}$. Наконец, введя обозначение $\kappa = n\beta$, придем к формуле (2.5).

В случае диэлектриков, построенных из полярных молекул, ориентирующему действию внешнего поля противится тепловое движение молекул, стремящееся разбросать их дипольные моменты по всем направлениям. В результате устанавливается некоторая преимущественная ориентация дипольных моментов молекул в направлении поля. Соответствующий статистический расчет показывает в согласии с опытом, что поляризованность пропорциональна напряженности поля, т. е. приводит к формуле (2.5). Диэлектрическая восприимчивость таких диэлектриков обратно пропорциональна абсолютной температуре.

В ионных кристаллах отдельные молекулы утрачивают свою обособленность. Весь кристалл представляет собой как бы одну гигантскую молекулу. Решетку ионного кристалла можно рассматривать как две вставленные одна в другую решетки, одна из которых образована положительными, а другая отрицательными ионами. При действии на ионы кристалла внешнего поля обе решетки сдвигаются относительно друг друга, что приводит к поляризации диэлектрика. Поляризованность и в этом случае связана с напряженностью поля соотношением (2.5). Отметим, что описываемая формулой (2.5) линейная зависимость между **E** и **P** имеет место лишь в не слишком сильных полях (аналогичное замечание относится и к формуле (2.3)).

2.3. Поле внутри диэлектрика

Заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, называются связанными. Под действием поля связанные заряды могут лишь немного смещаться из своих положений равновесия; покинуть пределы молекулы, в состав которой они входят, связанные заряды не могут.

Заряды, которые, хотя и находятся в пределах диэлектрика, но не входят в состав его молекул, а также заряды, расположенные за пределами диэлектрика, мы, следуя

Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицу [4]), будем называть сторонними [5]).

Поле в диэлектрике является суперпозицией поля $\mathbf{E}_{\text{стор}}$, создаваемого сторонними зарядами, и поля $\mathbf{E}_{\text{связ}}$ связанных зарядов. Результирующее поле называется микроскопическим (или истинным):

$$\mathbf{E}_{\text{микро}} = \mathbf{E}_{\text{стор}} + \mathbf{E}_{\text{связ}}. \tag{2.7}$$

Микроскопическое поле сильно изменяется в пределах межмолекулярных расстояний. Вследствие движения связанных зарядов поле $\mathbf{E}_{\text{микро}}$ изменяется также и со временем. При макроскопическом рассмотрении указанные изменения не обнаруживаются. Поэтому в качестве характеристики поля используется усредненное по физически бесконечно малому объему значение величины (2.7):

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E}_{\text{микро}} \rangle = \langle \mathbf{E}_{\text{стор}} \rangle + \langle \mathbf{E}_{\text{связ}} \rangle.$$

В дальнейшем усредненное поле сторонних зарядов мы будем обозначать через $\mathbf{E}_0$, а усредненное поле связанных зарядов — через $\mathbf{E}'$. Соответственно макроскопическим полем мы будем называть величину

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'. \tag{2.8}$$

Поляризованность $\mathbf{P}$ представляет собой макроскопическую величину. Поэтому под $\mathbf{E}$ в соотношении (2.5) следует понимать напряженность, определяемую формулой (2.8).

В отсутствие диэлектриков (т. е. в «вакууме») макроскопическое поле равно

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 = \langle \mathbf{E}_{\text{стор}} \rangle.$$

Именно эта величина должна подразумеваться под $\mathbf{E}$ в формуле (1.119).

Если сторонние заряды неподвижны, поле, определяемое выражением (2.8), обладает теми же свойствами, что

---

[4]) См. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1982. С. 57.

[5]) Принято называть такие заряды свободными. Однако такое название крайне неудачно, так как в ряде случаев сторонние заряды бывают отнюдь не свободными.

и электростатическое поле в вакууме. В частности, его можно характеризовать с помощью потенциала φ, который связан с напряженностью (2.8) соотношениями (1.40) и (1.44).

2.4. Объемные и поверхностные связанные заряды

Когда диэлектрик не поляризован, объемная плотность ρ' и поверхностная плотность σ' связанных зарядов равны нулю. В результате поляризации поверхностная плотность, а в некоторых случаях и объемная плотность связанных зарядов становятся отличными от нуля.

На рис. 2.1 изображен схематически поляризованный диэлектрик с неполярными (*а*) и полярными (*б*) молекулами. Из рисунка видно, что поляризация сопровождается возникновением в тонком поверхностном слое диэлектри-

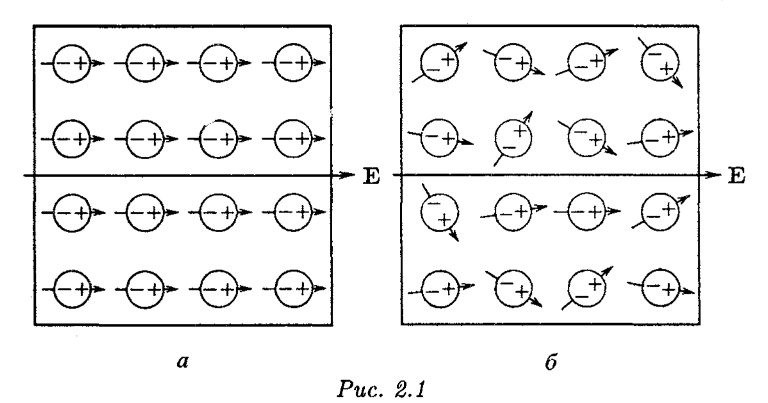


Рис. 2.1

ка избытка связанных зарядов одного знака. Если нормальная составляющая напряженности поля **E** для данного участка поверхности отлична от нуля, то под действием поля заряды одного знака уходят внутрь, а другого знака выходят наружу.

Между поляризованностью **P** и поверхностной плотностью связанных зарядов σ' имеется простая связь. Для ее нахождения рассмотрим бесконечную плоскопараллельную платину из однородного диэлектрика, помещенную в однородное электрическое поле (рис. 2.2). Выделим мысленно в пластине элементарный объем в виде очень тонкого цилиндра с образующими, параллельными **E** в ди-

электрике, и с основаниями площади ΔS, совпадающими с поверхностями пластины. Этот объем равен

$$\Delta V = l\Delta S\cos\alpha,$$

где l — расстояние между основаниями цилиндра, α — угол между вектором **E** и внешней нормалью к положительно заряженной поверхности диэлектрика. Объем ΔV имеет дипольный электрический момент

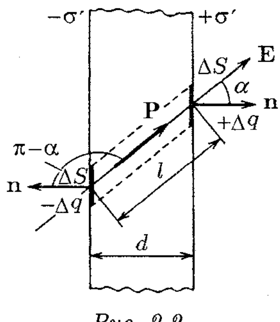


Рис. 2.2

$$P\Delta V = Pl\Delta S\cos\alpha$$

(P — модуль поляризованности).

С макроскопической точки зрения рассматриваемый объем эквивалентен диполю, образованному зарядами $+\sigma'\Delta S$ и $-\sigma'\Delta S$, отстоящими друг от друга на расстояние l. Поэтому его электрический момент можно представить в виде $\sigma'\Delta Sl$. Приравняв друг другу оба выражения для электрического момента, получим

$$Pl\Delta S\cos\alpha = \sigma'\Delta Sl.$$

Отсюда вытекает искомое соотношение между σ' и **P**:

$$\sigma' = P\cos\alpha = P_n, \tag{2.9}$$

где P_n — проекция поляризованности на внешнюю нормаль к соответствующей поверхности. Для правой поверхности на рис. 2.2 $P_n > 0$, соответственно σ' для нее положительна; для левой поверхности $P_n < 0$, соответственно σ' для нее отрицательна.

Выразив согласно (2.5) **P** через κ и **E**, придем к формуле

$$\sigma' = \kappa\varepsilon_0 E_n, \tag{2.10}$$

где E_n — нормальная составляющая напряженности поля внутри диэлектрика. В соответствии с (2.10) в тех местах, где линии напряженности выходят из диэлектрика ($E_n > 0$), на поверхности выступают положительные связанные заряды, там же, где линии напряженности входят в диэлектрик ($E_n < 0$), появляются отрицательные поверхностные заряды.

Формулы (2.9) и (2.10) справедливы и в самом общем случае, когда неоднородный диэлектрик произвольной

формы находится в неоднородном электрическом поле. Под P_n и E_n в этом случае нужно понимать нормальную составляющую соответствующего вектора, взятую в непосредственной близости к тому элементу поверхности, для которого определяется σ'.

Теперь обратимся к нахождению объемной плотности связанных зарядов, возникающих внутри неоднородного диэлектрика. Рассмотрим в неоднородном изотропном диэлектрике с неполярными молекулами воображаемую малую площадку ΔS (рис. 2.3). Пусть в единице объема диэлектрика имеется n одинаковых частиц с зарядом $+e$ и n одинаковых частиц с зарядом $-e$. В небольшой окрестности площадки ΔS электрическое поле и диэлектрик можно считать однородными. Поэтому все положительные заряды, находящиеся вблизи ΔS, сместятся при включении поля в направлении $\mathbf{E}$ на одинаковое расстояние l_1, а все отрицательные заряды сместятся в противоположном направлении на одинаковое расстояние l_2 (см. рис. 2.3). При этом через площадку ΔS пройдет в направлении нормали к ней некоторое количество зарядов одного знака (положительных, если $\alpha < \pi/2$, отрицательных, если $\alpha > \pi/2$) и в направлении, противоположном $\mathbf{n}$, некоторое количество зарядов другого знака (отрицательных, если $\alpha < \pi/2$, положительных, если $\alpha > \pi/2$).

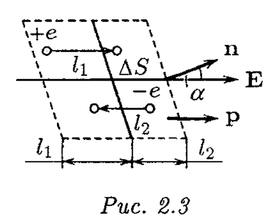


Рис. 2.3

Площадку ΔS пересекут все заряды $+e$, которые до включения поля отстояли от нее не более чем на $l_1 \cos\alpha$, т. е. все $+e$, заключенные в косом цилиндре объемом $l_1 \Delta S \cos\alpha$. Число этих зарядов равно $n l_1 \Delta S \cos\alpha$, а переносимый ими в направлении нормали к площадке заряд равен $e n l_1 \Delta S \cos\alpha$ (при $\alpha > \pi/2$ заряд, переносимый в направлении нормали за счет смещения зарядов $+e$, будет отрицательным).

Аналогично площадку ΔS пересекут все заряды $-e$, заключенные в объеме $l_2 \Delta S \cos\alpha$. Эти заряды перенесут в направлении нормали к площадке заряд, равный $e n l_2 \Delta S \cos\alpha$ (из рис. 2.3 видно, что при $\alpha < \pi/2$ заряды $-e$ перенесут через ΔS в направлении, противоположном $\mathbf{n}$, заряд $-e n l_2 \Delta S \cos\alpha$, что эквивалентно переносу в направлении $\mathbf{n}$ заряда $e n l_2 \Delta S \cos\alpha$).

Итак, при включении поля через площадку $\triangle S$ переносится в направлении нормали к ней заряд

$$\triangle q' = enl_1 \triangle S \cos\alpha + enl_2 \triangle S \cos\alpha = en(l_1 + l_2)\triangle S \cos\alpha.$$

Сумма $l_1 + l_2$ есть расстояние l, на которое смещаются относительно друг друга положительные и отрицательные связанные заряды в диэлектрике. В результате смещения каждая пара зарядов приобретает дипольный момент $p = el = e(l_1 + l_2)$. Число таких пар в единице объема равно n. Следовательно, произведение $e(l_1 + l_2)n = eln = pn$ дает модуль поляризованности P. Таким образом, заряд, проходящий при включении поля через площадку $\triangle S$ в направлении нормали к ней, равен

$$\triangle q' = P \triangle S \cos\alpha.$$

Поскольку диэлектрик изотропный, направления векторов **E** и **P** совпадают (см. рис. 2.3). Следовательно, α есть угол между векторами **P** и **n**, в связи с чем можно написать

$$\triangle q' = \mathbf{P}\mathbf{n}\triangle S.$$

Перейдя от $\triangle$ к дифференциалу, получим

$$dq' = \mathbf{P}\mathbf{n}dS = \mathbf{P}d\mathbf{S}.$$

Мы нашли связанный заряд dq', который проходит при включении поля через элементарную площадку dS в направлении нормали к ней; **P** есть поляризованность, возникающая под действием поля в том месте, где расположена площадка dS.

Представим себе внутри диэлектрика замкнутую поверхность S. При включении поля эту поверхность пересечет и выйдет наружу связанный заряд q', равный

$$q'_{\text{выш}} = \oint_S dq' = \oint_S \mathbf{P}\,d\mathbf{S}$$

(мы условились в случае замкнутых поверхностей брать внешнюю нормаль к площадкам dS). В результате в объеме, ограниченном поверхностью S, возникает избыточный связанный заряд

$$q'_{\text{изб}} = -q'_{\text{выш}} = -\oint_S \mathbf{P}d\mathbf{S} = -\Phi_P \qquad (2.11)$$

(Φ_P — поток вектора **P** через поверхность S).

Введя объемную плотность связанных зарядов ρ', можно написать

$$q'_{\text{изб}} = \int\limits_V \rho'\, dV$$

(интеграл берется по объему, ограниченному поверхностью S). Таким образом, мы приходим к формуле

$$\int\limits_V \rho'\, dV = -\oint\limits_V \mathbf{P}\, d\mathbf{S}.$$

Преобразуем поверхностный интеграл по теореме Остроградского–Гаусса (см. (1.110). В результате получится соотношение

$$\int\limits_V \rho'\, dV = -\int\limits_V \nabla\mathbf{P}\, dV.$$

Это соотношение должно выполняться для любого произвольно выбранного объема V, что возможно лишь в том случае, если в каждой точке диэлектрика выполняется равенство

$$\rho' = -\nabla\mathbf{P}. \tag{2.12}$$

Следовательно, плотность связанных зарядов равна дивергенции поляризованности **P**, взятой с обратным знаком.

Мы получили (2.12), рассматривая диэлектрик с неполярными молекулами. Однако эта формула справедлива и для диэлектриков с полярными молекулами.

Формуле (2.12) можно дать наглядную интерпретацию. Точки с положительной $\nabla\mathbf{P}$ служат источниками поля вектора **P**; из этих точек линии **P** расходятся (рис. 2.4). Точки с отрицательной $\nabla\mathbf{P}$ служат стоками поля вектора

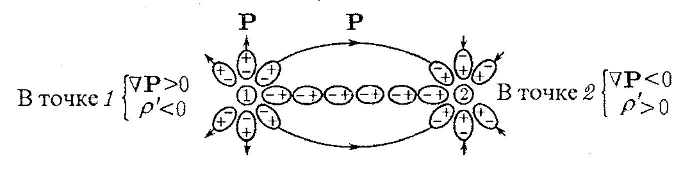


Рис. 2.4

P; к этим точкам линии **P** сходятся. При поляризации диэлектрика положительные связанные заряды смещаются в направлении вектора **P**, т. е. в направлении линий **P**; отрицательные же связанные заряды смещаются в проти-

воположном направлении (на рисунке обведены овалами связанные заряды, принадлежащие отдельным молекулам). В результате в местах с положительной $\nabla\mathbf{P}$ образуется избыток отрицательных связанных зарядов, а в местах с отрицательной $\nabla\mathbf{P}$ — избыток положительных связанных зарядов.

Связанные заряды отличаются от сторонних лишь тем, что не могут покинуть пределы молекул, в состав которых они входят. В остальном их свойства такие же, как и у всех прочих зарядов. В частности, они служат источниками электрического поля. Поэтому в случае, когда плотность связанных зарядов ρ' отлична от нуля, формулу (1.119) нужно писать в виде

$$\nabla\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho'). \tag{2.13}$$

Здесь ρ — плотность сторонних зарядов.

Подставим в (2.12) выражение (2.5) для $\mathbf{P}$ и воспользуемся формулой (1.105). В результате получим

$$\rho' = -\nabla(\kappa\varepsilon_0\mathbf{E}) = -\varepsilon_0\nabla(\kappa\mathbf{E}) = -\varepsilon_0(\mathbf{E}\nabla\kappa + \kappa\nabla\mathbf{E}).$$

Заменив $\nabla\mathbf{E}$ в соответствии с (2.13), придем к уравнению

$$\rho' = -\varepsilon_0\mathbf{E}\nabla\kappa - \kappa\rho - \kappa\rho'.$$

Отсюда

$$\rho' = -\frac{1}{1+\kappa}(\varepsilon_0\mathbf{E}\nabla\kappa + \kappa\rho). \tag{2.14}$$

Из формулы (2.14) вытекает, что объемная плотность связанных зарядов может быть отличной от нуля в двух случаях:

1) если диэлектрик неоднороден ($\nabla\kappa \neq 0$),

2) если в данном месте диэлектрика плотность сторонних зарядов отлична от нуля ($\rho \neq 0$).

В случае, когда внутри диэлектрика сторонних зарядов нет, объемная плотность связанных зарядов равна

$$\rho' = -\frac{\varepsilon_0}{1+\kappa}\mathbf{E}\nabla\kappa. \tag{2.15}$$

2.5. Вектор электрического смещения

В предыдущем параграфе мы отмечали, что источниками поля служат не только сторонние, но и связанные заряды. В соответствии с этим

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho'). \tag{2.16}$$

(см. (2.13)). Формула (2.16) малопригодна для нахождения вектора $\mathbf{E}$, так как она выражает свойства неизвестной величины $\mathbf{E}$ через связанные заряды, которые в свою очередь определяются неизвестной $\mathbf{E}$ (см. (2.10) и (2.14)).

Вычисление полей во многих случаях упрощается, если ввести вспомогательную величину, источниками которой являются только сторонние заряды ρ. Чтобы установить вид этой величины, подставим в (2.16) выражение (2.12) для ρ':

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \nabla \mathbf{P}).$$

Отсюда следует, что

$$\nabla(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho \tag{2.17}$$

(мы внесли ε_0 под знак ∇). Выражение, стоящее в (2.17) в скобках, представляет собой искомую величину. Ее обозначают буквой $\mathbf{D}$ и называют электрическим смещением (или электрической индукцией).

Итак, *электрическим смещением* (*электрической индукцией*) называется величина, определяемая соотношением

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \tag{2.18}$$

Подставив выражение (2.5) для $\mathbf{P}$, получим

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \varkappa \mathbf{E} = \varepsilon_0(1 + \varkappa)\mathbf{E}. \tag{2.19}$$

Безразмерную величину

$$\varepsilon = 1 + \varkappa \tag{2.20}$$

называют *относительной диэлектрической проницаемостью* или просто *диэлектрической про-*

ницаемостью среды[6]). Таким образом, соотношение (2.19) можно записать в виде

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}. \tag{2.21}$$

Согласно (2.21) вектор **D** пропорционален вектору **E**. Напомним, что мы рассматриваем изотропные диэлектрики. В анизотропных диэлектриках векторы **E** и **D**, вообще говоря, неколлинеарны.

В соответствии с формулами (1.15) и (2.21) электрическое смещение поля точечного заряда в вакууме равно

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r. \tag{2.22}$$

Единицей электрического смещения служит кулон на квадратный метр (Кл/м^2).

Согласно (2.17)

$$\nabla \mathbf{D} = \rho. \tag{2.23}$$

Проинтегрируем это соотношение по произвольному объему V:

$$\int\limits_V \nabla \mathbf{D}\, dV = \int\limits_V \rho\, dV.$$

Преобразуем его левую часть по теореме Остроградского–Гаусса (см. (1.110)):

$$\oint\limits_S \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = \int\limits_V \rho\, dV. \tag{2.24}$$

Слева стоит Φ_D — поток вектора **D** через замкнутую поверхность S, справа — сумма сторонних зарядов $\sum q_i$, заключенных внутри этой поверхности. Поэтому равенство (2.24) можно представить в виде

$$\Phi_D = \sum q_i. \tag{2.25}$$

Формулы (2.24) и (2.25) выражают теорему Гаусса для вектора **D**: *поток электрического смещения через зам-*

---

[6]) В электротехнике вводят так называемую абсолютную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$. Однако эта величина физического смысла не имеет, и мы ею пользоваться не будем.

кнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности сторонних зарядов.

В вакууме $\mathbf{P} = 0$, так что определяемая выражением (2.18) величина $\mathbf{D}$ превращается в $\varepsilon_0\mathbf{E}$ и формулы (2.24) и (2.25) переходят в формулы (1.118) и (1.116).

Единицей потока вектора электрического смещения является кулон. Согласно (2.25) заряд в 1 Кл создает через охватывающую его поверхность поток смещения в 1 Кл.

Поле вектора $\mathbf{D}$ можно изобразить с помощью линий электрического смещения (мы будем для краткости называть их линиями смещения), направление и густота которых определяются точно так же, как и для линий вектора $\mathbf{E}$ (см. § 1.5). Линии вектора $\mathbf{E}$ могут начинаться и заканчиваться как на сторонних, так и на связанных зарядах. Источниками поля вектора $\mathbf{D}$ служат только сторонние заряды. Поэтому линии смещения могут начинаться или заканчиваться лишь на сторонних зарядах. Через точки, в которых помещаются связанные заряды, линии смещения проходят не прерываясь.

Электрическую индукцию[7]) в гауссовой системе определяют соотношением

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \tag{2.26}$$

Подстановка в него значения (2.6) для $\mathbf{P}$ дает

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\varkappa)\mathbf{E}. \tag{2.27}$$

Величину

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\varkappa \tag{2.28}$$

называют **диэлектрической проницаемостью**. Введя эту величину в формулу (2.27), получим

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}. \tag{2.29}$$

В гауссовой системе электрическая индукция в вакууме совпадает с напряженностью поля $\mathbf{E}$. Следовательно, электрическая индукция поля точечного заряда в вакууме определяется формулой (1.16).

---

[7]) Термин «электрическое смещение» применительно к величине (2.26) не употребляется.

Согласно формуле (2.22) электрическое смещение, создаваемое зарядом в 1 Кл на расстоянии 1 м, составляет

$$D = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 1} = \frac{1}{4\pi}\,\text{Кл/м}^2.$$

В гауссовой системе электрическая индукция в этом случае равна

$$D = \frac{q}{r^2} = \frac{3 \cdot 10^9}{10^4} = 3 \cdot 10^5\ \text{СГСЭ-ед.}$$

Таким образом, 1 Кл/м^2 соответствует $4\pi \cdot 3 \cdot 10^5$ СГСЭ-ед. электрической индукции.

В гауссовой системе выражения теоремы Гаусса имеют вид

$$\oint_S \mathbf{D}\,d\mathbf{S} = 4\pi \int \rho\, dV, \qquad (2.30)$$

$$\Phi_D = 4\pi \sum q_i. \qquad (2.31)$$

Согласно (2.31) заряд в 1 Кл создает поток вектора электрической индукции, равный $4\pi q = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^9$ СГСЭ-единиц. Таким образом, между единицами потока вектора **D** существует соотношение 1 Кл $= 4\pi \cdot 3 \cdot 10^9$ СГСЭ-ед. потока.

2.6. Примеры на вычисление поля в диэлектриках

Чтобы выяснить смысл величин **D** и ε, рассмотрим несколько примеров полей в диэлектриках.

Поле внутри плоской пластины. Рассмотрим две бесконечные параллельные разноименно заряженные плоскости. Пусть создаваемое ими в вакууме поле характеризуется напряженностью $\mathbf{E}_0$ и смещением $\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0$. Внесем в это поле пластину из однородного изотропного диэлектрика и расположим ее так, как показано на рис. 2.5. Под действием поля диэлектрик поляризуется, и на его поверхностях появятся связанные заряды плотности σ'. Эти заряды создадут внутри пластины однородное поле, напряженность которого согласно формуле (1.123) равна $E' =$

$= \sigma'/\varepsilon_0$. Вне диэлектрика в данном случае $E' = 0$. Напряженность поля E_0 равна σ/ε_0. Оба поля направлены навстречу друг другу; следовательно, внутри диэлектрика

$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \sigma'). \tag{2.32}$$

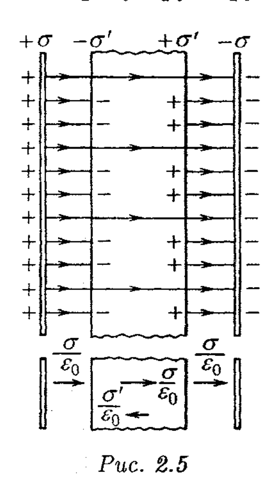


Рис. 2.5

Вне диэлектрика $E = E_0$.

Поляризация диэлектрика обусловлена полем (2.32). Это поле перпендикулярно к поверхностям пластины. Поэтому $E_n = E$ и в соответствии с (2.10) $\sigma' = \kappa\varepsilon_0 E$. Подставив это значение в формулу (2.32), получим

$$E = E_0 - \kappa E,$$

откуда

$$E = \frac{E_0}{1+\kappa} = \frac{E_0}{\varepsilon}. \tag{2.33}$$

Итак, в рассматриваемом случае диэлектрическая проницаемость ε показывает, во сколько раз ослабляется поле в диэлектрике.

Умножив (2.33) на $\varepsilon_0\varepsilon$, получим электрическое смещение внутри пластины

$$D = \varepsilon_0\varepsilon E = \varepsilon_0 E_0 = D_0. \tag{2.34}$$

Таким образом, электрическое смещение внутри пластины совпадает с электрическим смещением внешнего поля D_0. Заменив в (2.34) E_0 на σ/ε_0, получим, что

$$D = \sigma. \tag{2.35}$$

Чтобы найти σ', выразим в (2.33) E и E_0 через плотности зарядов:

$$\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \sigma') = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Отсюда

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma. \tag{2.36}$$

Рис. 2.5 выполнен в предположении, что $\varepsilon = 3$. В соответствии с этим густота линий **E** в диэлектрике в три раза

меньше, чем вне пластины. Линии проведены на одинаковых расстояниях друг от друга, поскольку поле однородно. В данном случае σ' можно найти, не прибегая к формуле (2.36). Действительно, раз напряженность поля внутри пластины в три раза меньше, чем вне ее, то из трех линий напряженности, начинающихся (или заканчивающихся) на сторонних зарядах, две должны заканчиваться (соответственно начинаться) на связанных зарядах. Отсюда вытекает, что плотность связанных зарядов должна быть равна 2/3 плотности сторонних зарядов.

В гауссовой системе напряженность E', создаваемая связанными зарядами σ', равна $4\pi\sigma'$. Поэтому соотношение (2.32) имеет вид

$$E = E_0 - E' = E_0 - 4\pi\sigma'.$$

Поверхностная плотность σ' связана с напряженностью E соотношением $\sigma' = \varkappa E_n$. Следовательно, можно написать, что

$$E = E_0 - 4\pi\varkappa E.$$

Отсюда

$$E = \frac{E_0}{1 + 4\pi\varkappa} = \frac{E_0}{\varepsilon}.$$

Таким образом, диэлектрическая проницаемость ε, так же как и ε в СИ, показывает, во сколько раз ослабляется поле внутри диэлектрика. Следовательно, значения ε в СИ и в гауссовой системе совпадают. Отсюда, приняв во внимание (2.20) и (2.28), заключаем, что диэлектрические восприимчивости в гауссовой системе ($\varkappa_{\text{ГС}}$) и в СИ ($\varkappa_{\text{СИ}}$) отличаются друг от друга множителем 4π:

$$\varkappa_{\text{СИ}} = 4\pi\varkappa_{\text{ГС}}. \tag{2.37}$$

Поле внутри шарового слоя. Окружим заряженную сферу радиуса R концентрическим шаровым слоем из однородного изотропного диэлектрика (рис. 2.6). На внутренней поверхности слоя появится связанный заряд q_1', распределенный с плотностью σ_1' ($q_1' = 4\pi R_1^2\sigma_1'$), на наружной — заряд q_2', распределенный с плотностью $\sigma_2'(q_2' = 4\pi R_2^2\sigma_2')$. Знак заряда q_2' совпадает со знаком заряда q сферы, знак q_1' ему противоположен. Заряды q_1' и q_2' создают на расстоянии r , превышающем соответственно R_1

и R_2, поле, совпадающее с полем точечного заряда такой же величины (см. формулу (1.126)). Внутри поверхностей, по которым они распределены, заряды q'_1 и q'_2 поля не создают. Следовательно, напряженность поля E' внутри диэлектрика равна

$$E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi R_1^2\sigma'_1}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{R_1^2\sigma'_1}{r^2}$$

и противоположна по направлению напряженности поля E_0. Результирующее поле в диэлектрике

$$E(r) = E_0 - E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} - \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{R_1^2\sigma'_1}{r^2} \qquad (2.38)$$

убывает по закону $1/r^2$. Поэтому можно утверждать, что

$$\frac{E(R_1)}{E(r)} = \frac{r^2}{R_1^2}, \quad \text{т. е.} \quad E(R_1) = E(r)\frac{r^2}{R_1^2},$$

где $E(R_1)$ — напряженность поля в диэлектрике в непосредственной близости к внутренней поверхности слоя.

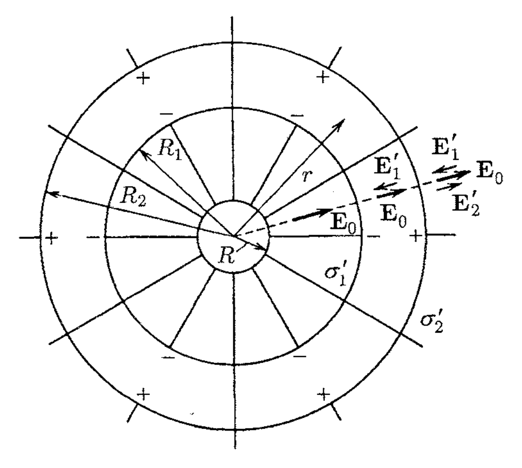


Рис. 2.6

Именно эта напряженность определяет величину σ'_1:

$$\sigma'_1 = \kappa\varepsilon_0 E(R_1) = \kappa\varepsilon_0 E(r)\frac{r^2}{R_1^2} \qquad (2.39)$$

(в каждой точке поверхности $|E_n| = E$). Подставив выражение (2.39) в формулу (2.38), получим

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} - \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{R_1^2\kappa\varepsilon_0 E(r) r^2}{r^2 R_1^2} = E_0(r) - \kappa E(r).$$

Отсюда находим, что внутри диэлектрика $E = E_0/\varepsilon$ и, следовательно, $D = \varepsilon_0 E_0$ (ср. с формулами (2.33) и (2.34)).

Поле внутри диэлектрика изменяется по закону $1/r^2$. Поэтому имеет место соотношение $\sigma_1'/\sigma_2' = R_2^2/R_1^2$. Отсюда вытекает, что $q_1' = q_2'$. Следовательно, поля, создаваемые этими зарядами, на расстояниях, превышающих R_2, взаимно уничтожают друг друга, так что вне шарового слоя $E' = 0$ и $E = E_0$.

Положив R_1 равным R, а $R_2 = \infty$, придем к случаю заряженной сферы, погруженной в безграничный однородный и изотропный диэлектрик. Напряженность поля вне такой сферы равна

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}. \tag{2.40}$$

Такова же будет напряженность поля, создаваемого в безграничном диэлектрике точечным зарядом.

Оба рассмотренных примера характерны тем, что диэлектрик был однородным и изотропным, а ограничивающие его поверхности совпадали с эквипотенциальными поверхностями поля сторонних зарядов. Полученный нами в этих случаях результат является общим. *Если однородный и изотропный диэлектрик полностью заполняет объем, ограниченный эквипотенциальными поверхностями поля сторонних зарядов, то вектор электрического смещения совпадает с вектором напряженности поля сторонних зарядов, умноженным на* ε_0, и, следовательно, *напряженность поля внутри диэлектрика в* ε *раз меньше, чем напряженность поля сторонних зарядов.*

Если упомянутые условия не соблюдаются, векторы $\mathbf{D}$ и $\varepsilon_0\mathbf{E}$ не совпадают. На рис. 2.7 показано поле в пластине диэлектрика, перекошенной относительно плоскостей, несущих сторонние заряды. Вектор $\mathbf{E}'$ перпендикулярен к граням пластины, поэтому $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}_0$ неколлинеарны. Вектор $\mathbf{D}$ направлен так же, как $\mathbf{E}$, следовательно, $\mathbf{D}$ и $\varepsilon_0\mathbf{E}_0$ не совпадают по направлению. Можно показать, что они не совпадают и по модулю.

В рассмотренных выше примерах из-за специально выбранной формы диэлектрика поле $\mathbf{E}'$ было отлично от нуля

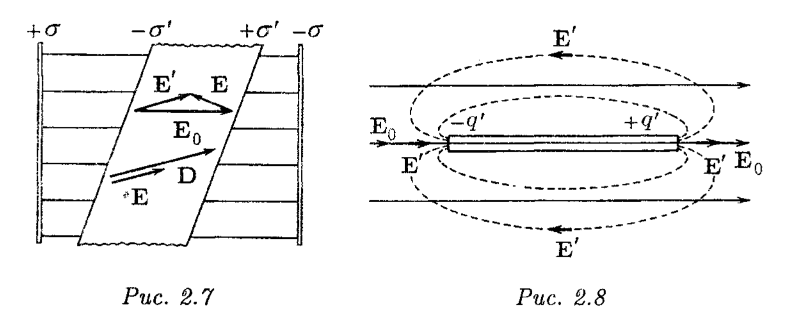


Рис. 2.7

Рис. 2.8

только внутри диэлектрика. В общем случае $\mathbf{E}'$ может быть отлично от нуля и за пределами диэлектрика.

Поместим в первоначально однородное поле стержень из диэлектрика (рис. 2.8). Вследствие поляризации на концах стержня образуются связанные заряды противоположных знаков. Их поле вне стержня эквивалентно полю диполя (поле $\mathbf{E}'$ показано на рисунке штриховыми линиями). Легко сообразить, что результирующее поле $\mathbf{E}$ вблизи концов стержня больше поля $\mathbf{E}_0$.

2.7. Условия на границе двух диэлектриков

Вблизи поверхности раздела двух диэлектриков векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ должны удовлетворять определенным граничным условиям, которые вытекают из соотношений

$$[\nabla\mathbf{E}] = 0, \quad \nabla\mathbf{D} = \rho \tag{2.41}$$

(см. (1.114) и (2.23)).

Рассмотрим границу между двумя диэлектриками с проницаемостями ε_1 и ε_2 (рис. 2.9). Выберем на этой поверхности произвольно направленную ось x. Возьмем небольшой прямоугольный контур длины a и ширины b, который частично проходит в первом диэлектрике, частично — во втором. Ось x проходит через середины сторон b.

Пусть в диэлектриках создано поле, напряженность которого в первом диэлектрике равна $\mathbf{E}_1$, а во втором — $\mathbf{E}_2$. Вследствие того что $[\nabla\mathbf{E}] = 0$, циркуляция вектора $\mathbf{E}$ по выбранному нами контуру должна быть равна нулю (см.

формулу (1.112)). При малых размерах контура и указанном на рис. 2.9 направлении обхода циркуляция вектора **E** может быть представлена в виде

$$\oint E_l\,dl = E_{1x}a - E_{2x}a + \langle E_b\rangle \cdot 2b, \qquad (2.42)$$

где $\langle E_b\rangle$ — среднее значение E_l на перпендикулярных к границе участках контура. Приравняв это выражение нулю, придем к соотношению

$$(E_{2x} - E_{1x})a = \langle E_b\rangle \cdot 2b.$$

В пределе, при стремящейся к нулю ширине контура b, получается равенство

$$E_{1x} = E_{2x}, \qquad (2.43)$$

Значения проекций векторов $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ на ось x берутся в непосредственной близости к границе диэлектриков.

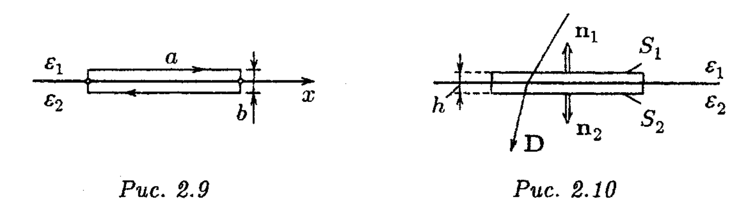


Рис. 2.9 Рис. 2.10

Соотношение (2.43) выполняется при произвольном выборе оси x; нужно лишь, чтобы эта ось лежала в плоскости раздела диэлектриков. Из (2.43) следует, что при таком выборе оси x, при котором $E_{1x} = 0$, проекция E_{2x} также будет равна нулю. Это означает, что векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ в двух близких точках, взятых по разные стороны границы, лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности раздела. Представим каждый из векторов $\mathbf{E}_1$и $\mathbf{E}_2$ в виде суммы нормальной и тангенциальной составляющих:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{1n} + \mathbf{E}_{1\tau}; \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2n} + \mathbf{E}_{2\tau}.$$

В соответствии с (2.43)

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \qquad (2.44)$$

Здесь $E_{i\tau}$ — проекция вектора $\mathbf{E}_i$ на орт $\boldsymbol{\tau}$, направленный

вдоль линии пересечения плоскости раздела диэлектриков с плоскостью, в которой лежат векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$.

Заменив согласно (2.21) проекции вектора $\mathbf{E}$ проекциями вектора $\mathbf{D}$, деленными на $\varepsilon_0\varepsilon$, получим соотношение

$$\frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_0\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_0\varepsilon_2},$$

из которого следует, что

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \tag{2.45}$$

Теперь возьмем на границе диэлектриков воображаемую цилиндрическую поверхность высоты h (рис. 2.10). Основание S_1 расположено в первом диэлектрике, основание S_2 — во втором. Оба основания одинаковы ($S_1 = S_2 = S$) и настолько малы, что в пределах каждого из них поле можно считать однородным. Применим к этой поверхности теорему Гаусса (см. (2.25)). Если сторонних зарядов на границе между диэлектриками нет, правая часть в (2.25) равна нулю. Следовательно, $\Phi_D = 0$.

Поток через основание S_1 равен $D_{1n}S$, где D_{1n} — проекция вектора $\mathbf{D}$ в первом диэлектрике на нормаль $\mathbf{n}_1$. Аналогично поток через основание S_2 равен $D_{2n}S$, где D_{2n} — проекция вектора $\mathbf{D}$ во втором диэлектрике на нормаль $\mathbf{n}_2$. Поток через боковую поверхность можно представить в виде $\langle D_n\rangle S_{\text{бок}}$, где $\langle D_n\rangle$ — значение D_n, усредненное по всей боковой поверхности, $S_{\text{бок}}$ — значение этой поверхности. Таким образом, можно написать

$$\Phi_D = D_{1n}S + D_{2n}S + \langle D_n\rangle S_{\text{бок}} = 0. \tag{2.46}$$

Если устремить высоту цилиндра h к нулю, $S_{\text{бок}}$ также будет стремиться к нулю. Поэтому в пределе получится соотношение

$$D_{1n} = -D_{2n}.$$

Здесь D_{in} — проекция на $\mathbf{n}_i$ вектора $\mathbf{D}$ в i-м диэлектрике в непосредственной близости к его границе с другим диэлектриком. Знаки проекций оказались разными вследствие того, что нормали $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ к основаниям цилиндра имеют противоположные направления. Если проецировать $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ на одну и ту же нормаль, получится условие

$$D_{1n} = D_{2n}. \tag{2.47}$$

Заменив согласно (2.21) проекции **D** соответствующими проекциями вектора **E**, умноженными на $\varepsilon_0\varepsilon$, получим соотношение

$$\varepsilon_0\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_0\varepsilon_2 E_{2n},$$

из которого следует, что

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \qquad (2.48)$$

Полученные нами результаты означают, что при переходе через границу раздела двух диэлектриков нормальная составляющая вектора **D** и тангенциальная составляющая вектора **E** изменяются непрерывно. Тангенциальная же составляющая вектора **D** и нормальная составляющая вектора **E** при переходе через границу раздела претерпевают разрыв.

Соотношения (2.44), (2.45), (2.47) и (2.48) определяют условия, которым должны удовлетворять векторы **E** и **D** на границе двух диэлектриков (в том случае, если на этой границе нет сторонних зарядов). Мы получили эти соотношения для электростатического поля. Однако они справедливы и для полей, изменяющихся со временем (см. § 3.3 кн. 4).

Найденные нами условия справедливы и для границы диэлектрика с вакуумом. В этом случае одну из диэлектрических проницаемостей нужно положить равной единице.

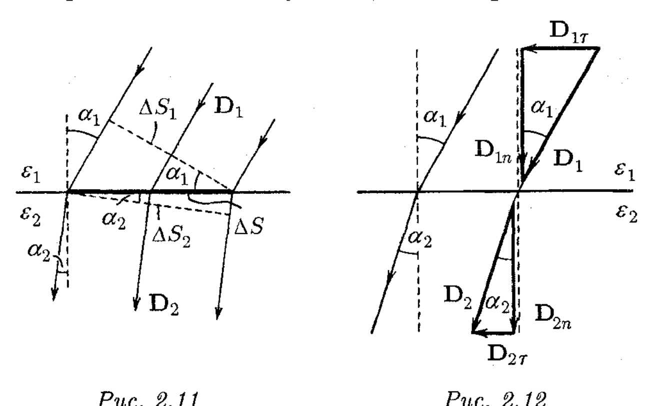


Рис. 2.11 Рис. 2.12

Заметим, что условие (2.47) можно получить, исходя из того факта, что линии смещения проходят через границу раздела двух диэлектриков не прерываясь (рис. 2.11).

В соответствии с правилом проведения линий число линий, приходящих к площадке $\triangle S$ из первого диэлектрика, равно $D_1 \triangle S_1 = D_1 \triangle S \cos\alpha_1$. Аналогично число линий, выходящих из площадки $\triangle S$ во второй диэлектрик, равно $D_2 \triangle S_2 = D_2 \triangle S \cos\alpha_2$. Если линии не терпят на границе разрыва, оба эти числа должны быть одинаковыми:

$$D_1 \triangle S \cos\alpha_1 = D_2 \triangle S \cos\alpha_2.$$

Сократив на $\triangle S$ и приняв во внимание, что произведение $D\cos\alpha$ дает значение нормальной составляющей вектора $\mathbf{D}$, придем к условию (2.47).

На границе диэлектриков линии смещения терпят излом (преломляются), вследствие чего угол α между нормалью к поверхности раздела и линией $\mathbf{D}$ изменяется. Из рис. 2.12 следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha_1 : \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}} : \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}},$$

откуда с учетом формул (2.45) и (2.47) получается закон преломления линий электрического смещения:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \qquad (2.49)$$

При переходе в диэлектрик с меньшей ε угол, образуемый линиями смещения с нормалью, уменьшается, линии располагаются реже; при переходе в диэлектрик с большей ε линии смещения, напротив, сгущаются.

2.8. Силы, действующие на заряд в диэлектрике

Если в электрическое поле в вакууме внести заряженное тело столь малых размеров, что внешнее поле в пределах тела можно считать однородным, то на тело будет действовать сила

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \qquad (2.50)$$

Чтобы заряженное тело поместить в поле, созданное в диэлектрике, в последнем нужно сделать полость. В жидком или газообразном диэлектрике такую полость образует само тело, вытесняя диэлектрик из занимаемого им объема. Поле внутри полости $\mathbf{E}_{\text{пол}}$ будет отлично от поля $\mathbf{E}$ в сплошном диэлектрике. Таким образом, силу, действующую на помещенное в полость заряженное тело, нельзя

вычислять как произведение заряда q на напряженность поля $\mathbf{E}$, существовавшую в диэлектрике до внесения в него тела.

Вычисляя силу, действующую на заряженное тело в жидком или газообразном диэлектрике, нужно учитывать еще одно обстоятельство. На границе с телом в диэлектрике возникают механические натяжения, что приводит к появлению дополнительной механической силы $\mathbf{F}_{\text{нат}}$, действующей на тело.

Таким образом, сила, действующая на заряженное тело в диэлектрике, вообще говоря, не может быть определена по формуле (2.50), и задача ее вычисления обычно бывает весьма сложной. Для жидкого и газообразного диэлектрика вычисления дают любопытный результат. Оказывается, что результирующая электрической силы $q\mathbf{E}_{\text{пол}}$ и механической силы $\mathbf{F}_{\text{нат}}$ равна в точности $q\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — напряженность поля в сплошном диэлектрике:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_{\text{пол}} + \mathbf{F}_{\text{нат}} = q\mathbf{E}. \tag{2.51}$$

Напряженность поля, создаваемого в однородном безграничном диэлектрике точечным зарядом, определяется формулой (2.40). Следовательно, для силы взаимодействия двух точечных зарядов, погруженных в однородный безграничный диэлектрик, получается выражение

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{\varepsilon r^2}. \tag{2.52}$$

Эта формула выражает закон Кулона для зарядов, находящихся в диэлектрике. Она справедлива только для жидких и газообразных диэлектриков.

В некоторых книгах формулу (2.52) выдают за «самое общее выражение закона Кулона». В связи с этим приведем следующие слова Р.Фейнмана: «Во многих старых книгах по электричеству изложение начинается с «основного» закона, по которому сила, действующая между зарядами, есть ... (приводится формула (2.52)..., а эта точка зрения абсолютно неприемлема. Во-первых, это не всегда верно; это справедливо только в мире, заполненном жидкостью; во-вторых, так получается лишь для постоянного значения ε, что для большинства реальных материалов выполняется приближенно» (Фейнмановские лекции по физике. Вып. 5. — М.: Мир, 1966. С. 208).

Вопросы, касающиеся сил, действующих на заряд внутри полости, сделанной в твердом диэлектрике, мы рассматривать не будем.

2.9. Сегнетоэлектрики

Существует группа веществ, которые могут обладать спонтанной (самопроизвольной) поляризованностью в отсутствие внешнего поля. Это явление было первоначально открыто для сегнетовой соли, в связи с чем все подобные вещества получили название сегнетоэлектриков. Первое детальное исследование электрических свойств сегнетовой соли было осуществлено Курчатовым[8] и Кобеко[9].

Сегнетоэлектрики отличаются от остальных диэлектриков рядом характерных особенностей:

1. В то время как у обычных диэлектриков ε составляет несколько единиц, достигая в виде исключения нескольких десятков (у воды, например, $\varepsilon = 81$), диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков бывает порядка нескольких тысяч.

2. Зависимость P от E не является линейной (см. ветвь *1* кривой, изображенной на рис. 2.13). Следовательно, диэлектрическая проницаемость оказывается зависящей от напряженности поля.

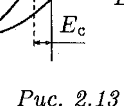
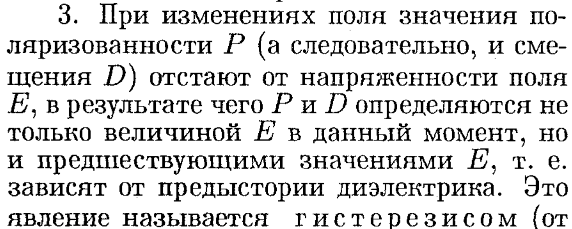


Рис. 2.13



3. При изменениях поля значения поляризованности P (а следовательно, и смещения D) отстают от напряженности поля E, в результате чего P и D определяются не только величиной E в данный момент, но и предшествующими значениями E, т. е. зависят от предыстории диэлектрика. Это явление называется гистерезисом (от греческого «гистерезис» — запаздывание). При циклических изменениях поля зависимость P от E следует изображенной на рис. 2.13 кривой, называемой петлей гистерезиса. При первоначальном включении поля поляризованность растет с E в соответствии с ветвью *1* кривой. Уменьшение P происходит по ветви *2*. При обращении E в нуль вещество сохраняет значение поляризован-

[8] Игорь Васильевич Курчатов (1903–1960) — советский физик.

[9] Павел Павлович Кобеко (1897–1954) — советский физик.

ности P_r, называемое остаточной поляризованностью. Только под действием противоположно направленного поля напряженности E_c поляризованность становится равной нулю. Это значение напряженности называется коэрцитивной силой. При дальнейшем изменении E получается ветвь *3* петли гистерезиса, и т. д.

Поведение поляризованности сегнетоэлектриков аналогично поведению намагниченности ферромагнетиков (см. § 7.9). По этой причине сегнетоэлектрики называют иногда ферроэлектриками.

Сегнетоэлектриками могут быть только кристаллические вещества, причем такие, у которых отсутствует центр симметрии. Так, например, кристаллы сегнетовой соли принадлежат к ромбической системе (см. § 4.2 кн. 3). Взаимодействие частиц в кристалле сегнетоэлектрика приводит к тому, что их дипольные моменты спонтанно устанавливаются параллельно друг другу. В исключительных случаях одинаковая ориентация дипольных моментов распространяется на весь кристалл. Обычно же в кристалле возникают области, в пределах каждой из которых дипольные моменты параллельны друг другу, однако направления поляризации разных областей бывают различны, так что результирующий момент всего кристалла может быть равен нулю. Области спонтанной (самопроизвольной) поляризации называются также доменами. Под действием внешнего поля моменты доменов поворачиваются как целое, устанавливаясь по направлению поля.

Для каждого сегнетоэлектрика имеется температура, при которой вещество утрачивает необычные свойства и становится нормальным диэлектриком. Эта температура называется точкой Кюри[10]). Сегнетова соль имеет две точки Кюри: $-15\,^\circ$C и $+22{,}5\,^\circ$C, причем она ведет себя как сегнетоэлектрик лишь в температурном интервале, ограниченном указанными значениями. При температуре ниже $-15\,^\circ$C и выше $+22{,}5\,^\circ$C электрические свойства сегнетовой соли обычны.

[10]) Пьер Кюри (1859–1906) — французский физик.

Глава 3

Проводники в электрическом поле

3.1. Равновесие зарядов на проводнике

Носители заряда в проводнике способны перемещаться под действием сколь угодно малой силы. Поэтому для равновесия зарядов на проводнике необходимо выполнение следующих условий:

1. Напряженность поля всюду внутри проводника должна быть равна нулю:

$$\mathbf{E} = 0. \tag{3.1}$$

В соответствии с (1.40) это означает, что потенциал внутри проводника должен быть постоянным ($\varphi = \text{const}$).

2. Напряженность поля на поверхности проводника должна быть в каждой точке направлена по нормали к поверхности:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n. \tag{3.2}$$

Следовательно, в случае равновесия зарядов поверхность проводника будет эквипотенциальной.

Если проводящему телу сообщить некоторый заряд q, то он распределится так, чтобы соблюдались условия равновесия. Представим себе произвольную замкнутую поверхность, полностью заключенную в пределах тела. При равновесии зарядов поле в каждой точке внутри проводника отсутствует; поэтому поток вектора электрического смещения через поверхность равен нулю. Согласно теореме Гаусса сумма зарядов внутри поверхности также будет равна нулю. Это справедливо для поверхности любых размеров, проведенной внутри проводника произвольным образом. Следовательно, при равновесии ни в каком месте внутри проводника не может быть избыточных зарядов — все они распределятся по поверхности проводника с некоторой плотностью σ.

Поскольку в состоянии равновесия внутри проводника избыточных зарядов нет, удаление вещества из некоторого объема, взятого внутри проводника, никак не отразится на

равновесном расположении зарядов. Таким образом, избыточный заряд распределяется на полом проводнике так же, как и на сплошном, т. е. по его наружной поверхности. На поверхности полости в состоянии равновесия избыточные заряды располагаться не могут. Этот вывод вытекает также из того, что одноименные элементарные заряды, образующие данный заряд q, взаимно отталкиваются и, следовательно, стремятся расположиться на наибольшем расстоянии друг от друга.

Представим себе небольшую цилиндрическую поверхность, образованную нормалями к поверхности проводника и основаниями dS, одно из которых расположено внутри, а другое вне проводника (рис. 3.1). Поток вектора электрического смещения через внутреннюю часть поверхности равен нулю, так как внутри проводника **E**, а значит, и **D** равны нулю. Вне проводника в непосредственной близости к нему напряженность поля **E** направлена по нормали к поверхности. Поэтому для выступающей наружу боковой поверхности цилиндра $D_n = 0$, а для внешнего основания $D_n = D$ (внешнее основание предполагается расположенным очень близко к поверхности проводника). Следовательно, поток смещения через рассматриваемую поверхность равен DdS, где D — смещение в непосредственной близости к поверхности проводника. Внутри цилиндра содержится сторонний заряд $\sigma\, dS$ (σ — плотность заряда в данном месте поверхности проводника). Применив теорему Гаусса, получим $D\, dS = \sigma\, dS$, т. е. $D = \sigma$. Отсюда следует, что напряженность поля вблизи поверхности проводника равна

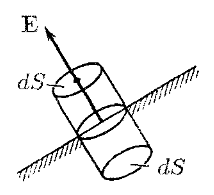


Рис. 3.1

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \tag{3.3}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник (ср. с формулой (1.125), полученной для случая $\varepsilon = 1$).

Рассмотрим поле, создаваемое изображенным на рис. 3.2 заряженным проводником. На больших расстояниях от проводника эквипотенциальные поверхности имеют характерную для точечного заряда форму сферы (на рисунке из-за недостатка места сферическая поверхность

изображена на небольшом расстоянии от проводника; штриховыми линиями показаны линии напряженности поля). По мере приближения к проводнику эквипотенциальные поверхности становятся все более сходными с поверхностью проводника, которая является эквипотенциальной. Вблизи выступов эквипотенциальные поверхности располагаются гуще, значит, и напряженность поля здесь больше. Следовательно, плотность зарядов на выступах особенно велика (см. (3.3)). К такому же выводу можно прийти, учтя, что из-за взаимного отталкивания заряды стремятся расположиться как можно дальше друг от друга.

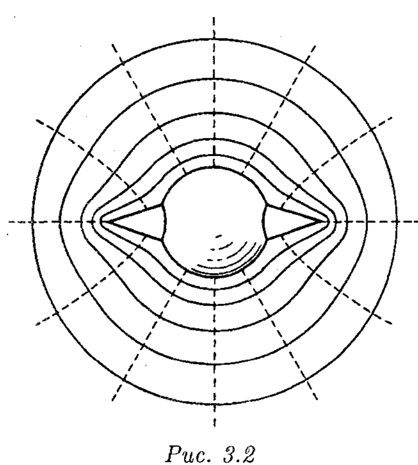


Рис. 3.2

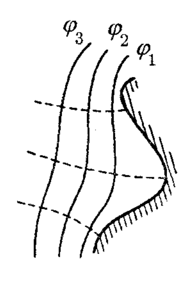


Рис. 3.3

Вблизи углублений в проводнике эквипотенциальные поверхности расположены реже (рис. 3.3). Соответственно напряженность поля и плотность зарядов в этих местах будут меньше. Вообще, плотность зарядов при данном потенциале проводника определяется кривизной поверхности — она растет с увеличением положительной кривизны (выпуклости) и убывает с увеличением отрицательной кривизны (вогнутости). Особенно велика бывает плотность зарядов на остриях. Поэтому напряженность поля вблизи остриев может быть настолько большой, что возникает ионизация молекул газа, окружающего проводник. Ионы иного знака, чем q, притягиваются к проводнику и нейтрализуют его заряд. Ионы того же знака, что и q, начинают двигаться от проводника, увлекая с собой нейтральные молекулы газа. В результате возникает ощутимое движение газа, называемое электрическим ветром. Заряд проводника уменьшается, он как бы стекает с

острия и уносится ветром. Поэтому такое явление называют истечением заряда с острия.

3.2. Проводник во внешнем электрическом поле

При внесении незаряженного проводника в электрическое поле носители заряда приходят в движение: положительные в направлении вектора **E**, отрицательные — в противоположную сторону. В результате у концов проводника возникают заряды противоположного знака, называемые индуцированными зарядами (рис. 3.4; штриховыми линиями показаны линии напряженности внешнего поля). Поле этих зарядов направлено противоположно внешнему полю. Следовательно, накапливание зарядов у концов проводника приводит к ослаблению в нем поля. Перераспределение носителей заряда происходит до тех пор, пока не будут выполнены условия (3.1) и (3.2), т. е. пока напряженность поля внутри проводника не станет равной нулю, а линии напряженности вне проводника — перпендикулярными к его поверхности (см. рис. 3.4). Таким образом, нейтральный проводник, внесенный в электрическое поле, разрывает часть линий напряженности — они заканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и вновь начинаются на положительных.

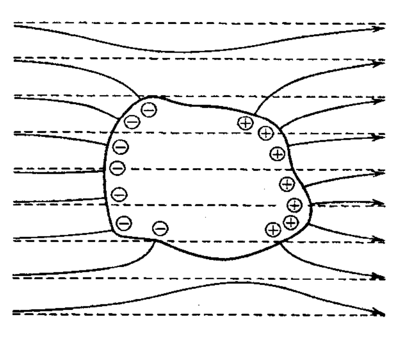


Рис. 3.4

Индуцированные заряды распределяются по внешней поверхности проводника. Если внутри проводника имеется полость, то при равновесном распределении индуцированных зарядов поле внутри нее равно нулю. На этом основывается электростатическая защита. Когда какой-то прибор хотят защитить от воздействия внешних полей, его окружают проводящим экраном. Внешнее поле компенсируется внутри экрана возникающими на его поверхности индуцированными зарядами. Подобный экран действует хорошо и в том случае, если его сделать не сплошным, а в виде густой сетки.

3.3. Электроемкость

Сообщенный проводнику заряд q распределяется по его поверхности так, чтобы напряженность поля внутри проводника была равна нулю. Такое распределение является единственным. Поэтому, если проводнику, уже несущему заряд q, сообщить еще заряд такой же величины, то второй заряд должен распределиться по проводнику точно таким же образом, как и первый, в противном случае он создает в проводнике поле, отличное от нуля. Следует оговорить, что это справедливо лишь для удаленного от других тел (уединенного) проводника. Если вблизи данного проводника находятся другие тела, сообщение проводнику новой порции заряда вызовет изменение поляризации этих тел либо изменение индуцированных зарядов на этих телах. В результате подобие в распределении различных порций заряда будет нарушено.

Итак, различные по величине заряды распределяются на уединенном проводнике подобным образом (отношение плотностей заряда в других произвольных точках поверхности проводника при любой величине заряда будет одним и тем же). Отсюда вытекает, что потенциал уединенного проводника пропорционален находящемуся на нем заряду. Действительно, увеличение в некоторое число раз заряда приводит к увеличению в то же число раз напряженности поля в каждой точке окружающего проводник пространства. Соответственно в такое же число раз возрастет работа переноса единичного заряда из бесконечности на поверхность проводника, т. е. потенциал проводника. Таким образом, для уединенного проводника

$$q = C\varphi. \tag{3.4}$$

Коэффициент пропорциональности C между потенциалом и зарядом называется *электроемкостью* (сокращенно просто *емкостью*) проводника. Из (3.4) следует, что

$$C = \frac{q}{\varphi}. \tag{3.5}$$

В соответствии с (3.5) емкость численно равна заряду, сообщение которого проводнику повышает его потенциал на единицу.

Вычислим потенциал заряженного шара радиуса R. Между разностью потенциалов и напряженностью поля существует соотношение (1.44). Поэтому потенциал шара φ

можно найти, проинтегрировав выражение (2.40) по r от R до ∞ (потенциал на бесконечности полагаем равным нулю):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{q}{\varepsilon r^2}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon R}. \tag{3.6}$$

Сопоставив (3.6) с (3.5), найдем, что емкость уединенного шара радиуса R, погруженного в однородный безграничный диэлектрик с проницаемостью ε, равна

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R. \tag{3.7}$$

За единицу емкости принимают емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда в 1 Кл. Эта единица емкости называется *фарадом* (Ф)[1].

В гауссовой системе формула для емкости уединенного шара имеет вид $C = \varepsilon R$. Поскольку ε — безразмерная величина, емкость имеет размерность длины. За единицу емкости принимается емкость уединенного шара радиуса 1 см, находящегося в вакууме. Эту единицу емкости называют сантиметром. Согласно (3.5)

$$1\text{Ф} = \frac{1\text{Кл}}{1\text{В}} = \frac{3\cdot 10^9}{1/300}\text{СГСЭ-ед. емкости} = 9\cdot 10^{11}\text{см}.$$

Емкостью в 1 Ф обладал бы уединенный шар радиуса $9\cdot 10^9$ м, т. е. радиуса, в 1500 раз большего радиуса Земли. Следовательно, фарад — очень большая величина. Поэтому на практике пользуются единицами, равными долям фарада: миллифарадом (мФ), микрофарадом (мкФ), нанофарадом (нФ) и пикофарадом (пФ) (см. § 3.3 кн. 1, табл. 3.1).

3.4. Конденсаторы

Уединенные проводники обладают небольшой емкостью. Даже шар таких размеров, как Земля, имеет емкость всего лишь 700 мкФ. Вместе с тем на практике бывает потребность в устройствах, которые при небольшом относительно

---

[1]) В честь английского физика Майкла Фарадея (1791–1867).

окружающих тел потенциале накапливали бы на себе («конденсировали») заметные по величине заряды. В основу таких устройств, называемых конденсаторами, положен тот факт, что электроемкость проводника возрастает при приближении к нему других тел. Это вызвано тем, что под действием поля, создаваемого заряженным проводником, на поднесенном к нему теле возникают индуцированные (на проводнике) или связанные (на диэлектрике) заряды. Заряды, противоположные по знаку заряду проводника q, располагаются ближе к проводнику, чем одноименные с q, и, следовательно, оказывают большее влияние на его потенциал. Поэтому при поднесении к заряженному проводнику какого-либо тела потенциал проводника уменьшается по абсолютной величине. Согласно формуле (3.5) это означает увеличение емкости проводника.

Конденсаторы делают в виде двух проводников, помещенных близко друг к другу. Образующие конденсатор проводники называют его обкладками. Чтобы внешние тела не оказывали влияния на емкость конденсатора, обкладкам придают такую форму и так располагают их относительно друг друга, чтобы поле, создаваемое накапливаемыми на них зарядами, было сосредоточено внутри конденсатора. Этому условию удовлетворяют (см. § 1.14) две пластинки, расположенные близко друг к другу, два коаксиальных цилиндра и две концентрические сферы. Соответственно бывают плоские, цилиндрические и сферические конденсаторы. Поскольку поле заключено внутри конденсатора, линии электрического смещения начинаются на одной обкладке и заканчиваются на другой. Следовательно, сторонние заряды, возникающие на обкладках, имеют одинаковую величину и различны по знаку.

Основной характеристикой конденсатора является его емкость, под которой понимают величину, прямо пропорциональную заряду q и обратно пропорциональную разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \tag{3.8}$$

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ называют напряжением между соответствующими точками[2]. Мы будем обозначать напряжение буквой U.

[2]) Более общее определение величины, называемой напряжением, будет дано в § 5.3 (см. формулу (5.18)).

Воспользовавшись этим обозначением, можно придать формуле (3.8) вид

$$C = \frac{q}{U}. \tag{3.9}$$

Здесь U — напряжение между обкладками.

Емкость конденсаторов измеряется в тех же единицах, что и емкость уединенных проводников (см. предыдущий параграф).

Емкость определяется геометрией конденсатора (формой и размерами обкладок и зазором между ними), а также диэлектрическими свойствами среды, заполняющей пространство между обкладками. Найдем формулу для емкости плоского конденсатора. Если площадь обкладки S, а заряд на ней q, то напряженность поля между обкладками равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon S}$$

(см. формулы (1.123) и (2.33); ε — диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей зазор между обкладками).

В соответствии с (1.44) разность потенциалов между обкладками равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0\varepsilon S}.$$

Отсюда для емкости плоского конденсатора получается формула

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}, \tag{3.10}$$

где S — площадь обкладки, d — зазор между обкладками, ε — диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего зазор.

Отметим, что емкость реального плоского конденсатора определяется формулой (3.10) с тем большей точностью, чем меньше зазор d по сравнению с линейными размерами обкладок.

Из формулы (3.10) следует, что размерность электрической постоянной ε_0 равна размерности емкости, деленной на размерность длины. В соответствии с этим ε_0 измеряется в фарадах на метр (см. (1.12)).

Если пренебречь рассеянием поля вблизи краев обкладок, нетрудно получить для емкости цилиндрического

конденсатора формулу

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln(R_2/R_1)}, \tag{3.11}$$

где l — длина конденсатора, R_1 и R_2 — радиусы внутренней и внешней обкладок. Эта формула определяет емкость реального конденсатора с тем большей точностью, чем меньше зазор между обкладками $d = R_2 - R_1$ по сравнению с l и R_1.

Емкость сферического конденсатора равна

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\,\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \tag{3.12}$$

где R_1 и R_2 — радиусы внутренней и внешней обкладок.

Помимо емкости каждый конденсатор характеризуется предельным напряжением $U_{\max}$, которое можно прикладывать к обкладкам конденсатора, не опасаясь его пробоя. При превышении этого напряжения между обкладками проскакивает искра, в результате чего разрушается диэлектрик и конденсатор выходит из строя.

Глава 4

Энергия электрического поля

4.1. Энергия заряженного проводника

Заряд q, находящийся на некотором проводнике, можно рассматривать как систему точечных зарядов Δq. В § 1.7 мы получили для энергии взаимодействия системы зарядов выражение (см. формулу (1.38))

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2}\sum q_i\varphi_i. \tag{4.1}$$

Здесь φ_i — потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме q_i в той точке, где помещается заряд q_i.

Поверхность проводника является эквипотенциальной. Поэтому потенциалы тех точек, в которых находятся точечные заряды Δq, одинаковы и равны потенциалу φ проводника. Воспользовавшись формулой (4.1), получим для энергии заряженного проводника выражение

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2}\sum \varphi\Delta q = \frac{1}{2}\varphi\sum \Delta q = \frac{1}{2}\varphi q. \tag{4.2}$$

Приняв во внимание соотношение (3.5), можно написать

$$W_{\text{п}} = \frac{\varphi q}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}. \tag{4.3}$$

Любое из этих выражений дает энергию заряженного проводника.

4.2. Энергия заряженного конденсатора

Пусть потенциал обкладки конденсатора, на которой находится заряд $+q$, равен φ_1, а потенциал обкладки, на которой находится заряд $-q$, равен φ_2. Тогда каждый из элементарных зарядов Δq, на которые можно разделить заряд $+q$, находится в точке с потенциалом φ_1, а каждый из зарядов, на которые можно разделить заряд $-q$, — в

точке с потенциалом φ_2. Согласно формуле (4.1) энергия такой системы зарядов равна

$$W_п = \frac{1}{2}[(+q)\varphi_1 + (-q)\varphi_2] = \frac{1}{2}q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}qU. \quad (4.4)$$

Воспользовавшись соотношением (3.9), можно написать три выражения для энергии заряженного конденсатора:

$$W_п = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \quad (4.5)$$

Формулы (4.5) отличаются от формул (4.3) только заменой φ на U.

С помощью выражения для потенциальной энергии можно найти силу, с которой пластины плоского конденсатора притягивают друг друга. Допустим, что расстояние между пластинами может меняться. Свяжем начало оси x с левой пластиной (рис. 4.1). Тогда координата x второй пластины будет определять зазор d между обкладками. Согласно формулам (3.10) и (4.5)

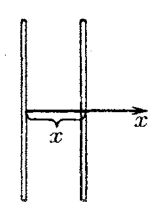


Рис. 4.1

$$W_п = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}x.$$

Продифференцируем это выражение по x, полагая заряд на обкладках неизменным (конденсатор отключен от источника напряжения). В результате получим проекцию на ось x силы, действующей на правую пластину:

$$F_x = -\frac{\partial W_п}{\partial x} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}.$$

Модуль этого выражения дает значение силы, с которой обкладки притягивают друг друга:

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}. \quad (4.6)$$

Теперь попытаемся вычислить силу притяжения между обкладками плоского конденсатора как произведение напряженности поля, создаваемого одной из обкладок, на

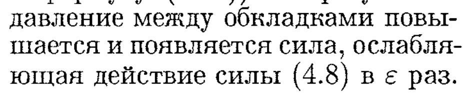
заряд, сосредоточенный на другой. Согласно формуле (1.22) напряженность поля, создаваемого одной обкладкой, равна

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}. \tag{4.7}$$

Диэлектрик ослабляет поле в зазоре в ε раз, но это имеет место только внутри диэлектрика (см. формулу (2.33) и связанный с нею текст). Заряды на обкладках располагаются вне диэлектрика и поэтому находятся под действием поля напряженности (4.7). Умножив заряд обкладки q на эту напряженность, получим для силы выражение

$$F' = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}. \tag{4.8}$$

Формулы (4.6) и (4.8) не совпадают. С опытом согласуется значение силы (4.6), получающееся из выражения для энергии. Это объясняется тем, что, кроме «электрической» силы (4.8), на обкладки действуют со стороны диэлектрика механические силы, стремящиеся их раздвинуть (см. § 2.8; отметим, что мы имеем в виду жидкий или газообразный диэлектрик). У края обкладок имеется рассеянное поле, убывающее при удалении от краев (рис. 4.2). Молекулы диэлектрика, обладая дипольным моментом, испытывают действие силы, втягивающей их в область более сильного поля (см. формулу (1.61)). В результате


давление между обкладками повышается и появляется сила, ослабляющая действие силы (4.8) в ε раз.

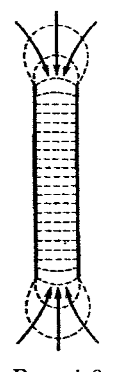


Рис. 4.2

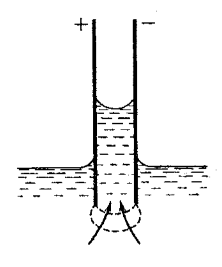


Рис. 4.3

Если заряженный конденсатор с воздушным зазором частично погрузить в жидкий диэлектрик, наблюдается втягивание диэлектрика в пространство между пластинами

(рис. 4.3). Это явление объясняется следующим образом. Диэлектрическая проницаемость воздуха практически равна единице. Поэтому до погружения пластин в диэлектрик емкость конденсатора можно считать равной $C_0 = \varepsilon_0 S/d$, а энергию равной $W_0 = q^2/2C_0$. При частичном заполнении зазора диэлектриком конденсатор можно рассматривать как два параллельно включенных конденсатора, один из которых имеет площадь обкладки, равную xS (x — относительная часть зазора, заполненная жидкостью), и заполнен диэлектриком с $\varepsilon > 1$, второй с воздушным зазором имеет площадь обкладки, равную $(1 - x)S$. При параллельном включении конденсаторов емкости складываются:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 S(1-x)}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S x}{d} = C_0 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)S}{d} x > C_0.$$

Поскольку $C > C_0$, энергия $W = q^2/2C$ будет меньше, чем W_0 (заряд q предполагается неизменным — перед погружением в жидкость конденсатор был отключен от источника напряжения). Следовательно, заполнение зазора диэлектриком оказывается энергетически выгодным. Поэтому диэлектрик втягивается в конденсатор и уровень его в зазоре поднимается. Это в свою очередь приводит к возрастанию потенциальной энергии диэлектрика в поле сил тяжести. В конечном итоге уровень диэлектрика в зазоре установится на некоторой высоте, соответствующей минимуму суммарной энергии (электрической и гравитационной). Рассмотренное явление сходно с капиллярным поднятием жидкости в узком зазоре между пластинками (см. § 5.5 кн. 3).

Втягивание диэлектрика в зазор между обкладками можно объяснить также и с микроскопической точки зрения. У краев пластин конденсатора имеется неоднородное поле. Молекулы диэлектрика обладают собственным дипольным моментом либо приобретают его под действием поля; поэтому на них действуют силы, стремящиеся переместить их в область сильного поля, т. е. внутрь конденсатора. Под действием этих сил жидкость втягивается в зазор до тех пор, пока электрические силы, действующие на жидкость у края пластин, не будут уравновешены весом столба жидкости.

4.3. Энергия электрического поля

Энергию заряженного конденсатора можно выразить через величины, характеризующие электрическое поле в зазоре между обкладками. Сделаем это для плоского конденсатора. Подстановка в формулу $W_п = CU^2/2$ (см. (4.5)) выражения (3.10) для емкости дает

$$W_п = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \left(\frac{U}{d}\right)^2 Sd.$$

Частное U/d равно напряженности поля в зазоре; произведение Sd представляет собой объем V, занимаемый полем. Следовательно,

$$W_п = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V. \tag{4.9}$$

Формула $W_п = q^2/2C$ связывает энергию конденсатора с зарядом на его обкладках, формула (4.9) — с напряженностью поля. Логично поставить вопрос: где же локализована (т. е. сосредоточена) энергия, что является носителем энергии — заряды или поле? В пределах электростатики, которая изучает постоянные по времени поля неподвижных зарядов, дать ответ на этот вопрос невозможно. Постоянные поля и обусловившие их заряды не могут существовать обособленно друг от друга. Однако меняющиеся во времени поля могут существовать независимо от возбудивших их зарядов и распространяться в пространстве в виде электромагнитных волн. Опыт показывает, что электромагнитные волны переносят энергию. В частности, энергия, за счет которой существует жизнь на Земле, доставляется от Солнца электромагнитными волнами; энергия, заставляющая звучать радиоприемник, переносится от передающей станции электромагнитными волнами и т. д. Эти факты заставляют признать, что носителем энергии является поле.

Если поле однородно (что имеет место в плоском конденсаторе), заключенная в нем энергия распределяется в пространстве с постоянной плотностью w, равной энергии поля, деленной на занимаемый полем объем. Из формулы (4.9) следует, что плотность энергии поля напряженности E, созданного в среде с проницаемостью ε, равна

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}. \tag{4.10}$$

С учетом соотношения (2.21) формулу (4.10) можно представить в виде

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}. \tag{4.11}$$

В изотропном диэлектрике направления векторов **E** и **D** совпадают. Поэтому формуле для плотности энергии можно придать вид

$$w = \frac{\mathbf{ED}}{2}.$$

Заменив в этой формуле **D** его значением (2.18), получим для w следующее выражение:

$$w = \frac{\mathbf{E}(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{2} = \frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{EP}}{2}. \tag{4.12}$$

Первое слагаемое в этом выражении совпадает с плотностью энергии поля **E** в вакууме. Второе слагаемое, как мы сейчас докажем, представляет собой энергию, затрачиваемую на поляризацию диэлектрика.

Поляризация диэлектрика заключается в том, что заряды, входящие в состав молекул, смещаются из своих положений под действием электрического поля **E**. В расчете на единицу объема диэлектрика работа, затрачиваемая на смещение зарядов q_i на величины $d\mathbf{r}_i$, равна

$$dA = \sum_{V=1} q_i \mathbf{E}\, d\mathbf{r}_i = \mathbf{E}\, d\left(\sum_{V=1} q_i \mathbf{r}_i\right)$$

(для простоты мы считаем, что поле однородно). Согласно формуле (2.1) сумма $\sum_{V=1} q_i \mathbf{r}_i$ равна дипольному моменту единицы объема, т. е. поляризованности диэлектрика **P**. Следовательно,

$$dA = \mathbf{E}\, d\mathbf{P}. \tag{4.13}$$

Вектор **P** связан с вектором **E** соотношением $\mathbf{P} = \varkappa\varepsilon_0 \mathbf{E}$ (см. (2.5)). Отсюда $d\mathbf{P} = \varkappa\varepsilon_0\, d\mathbf{E}$. Подставив это значение $d\mathbf{P}$ в (4.13), получим выражение

$$dA = \varkappa\varepsilon_0 \mathbf{E}\, d\mathbf{E} = d\left(\frac{\varkappa\varepsilon_0 \mathbf{E}^2}{2}\right) = d\left(\frac{\mathbf{EP}}{2}\right).$$

Наконец, произведя интегрирование, найдем для работы, затрачиваемой на поляризацию единицы объема диэлектрика, выражение

$$A = \frac{\mathbf{EP}}{2}, \tag{4.14}$$

которое совпадает со вторым слагаемым в формуле (4.12). Таким образом, выражения (4.11) включают в себя, кроме собственно энергии поля $\varepsilon_0 \mathbf{E}^2/2$, еще и энергию $\mathbf{EP}/2$, затрачиваемую при создании поля на поляризацию диэлектрика.

Зная плотность энергии поля в каждой точке, можно найти энергию поля, заключенную в любом объеме V. Для этого нужно вычислить интеграл

$$W = \int_V w\,dV = \int_V \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}\,dV. \tag{4.15}$$

В качестве примера вычислим энергию поля заряженного проводящего шара радиуса R, помещенного в однородный безграничный диэлектрик. Напряженность поля в этом случае является функцией только от r:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}.$$

Разобьем окружающее шар пространство на концентрические шаровые слои толщины dr. Объем слоя равен $dV = 4\pi r^2\,dr$. В нем заключена энергия

$$dW = w\,dV = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2\,dr = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{dr}{r^2}.$$

Энергия поля равна

$$W = \int dW = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R} = \frac{q^2}{2C}$$

(согласно (3.7) $4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$ есть емкость шара).

Полученное нами выражение совпадает с выражением для энергии проводника, обладающего емкостью C и несущего на себе заряд q (см. формулу (4.3)).

Глава 5

Постоянный электрический ток

5.1. Электрический ток

Если через некоторую воображаемую поверхность переносится суммарный заряд, отличный от нуля, говорят, что через эту поверхность течет электрический ток. Ток может течь в твердых телах (металлы, полупроводники), в жидкостях (электролиты) и в газах [1]).

Для протекания тока необходимо наличие в данном теле (или в данной среде) заряженных частиц, которые могут перемещаться в пределах всего тела. Такие частицы называются носителями тока. Ими могут быть электроны, либо ионы, либо, наконец, макроскопические частицы, несущие на себе избыточный заряд (например, заряженные пылинки и капельки).

Ток возникает при условии, что внутри тела существует электрическое поле. Носители заряда принимают участие в молекулярном тепловом движении и, следовательно, движутся с некоторой скоростью $\mathbf{v}$ и в отсутствие поля. Но в этом случае через произвольную площадку, проведенную мысленно в теле, проходит в обе стороны в среднем одинаковое количество носителей любого знака, так что ток равен нулю. При включении поля на хаотическое движение носителей со скоростью $\mathbf{v}$ накладывается упорядоченное движение со скоростью $\mathbf{u}$ [2]). Таким образом, скорость носителей будет $\mathbf{v}+\mathbf{u}$. Так как среднее значение $\mathbf{v}$ (но не v) равно нулю, то средняя скорость носителей равна $\langle\mathbf{u}\rangle$:

$$\langle\mathbf{v}+\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{v}\rangle + \langle\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{u}\rangle.$$

Из сказанного следует, что электрический ток можно определить как упорядоченное движение электрических зарядов.

---

[1]) Прохождение электрического тока через газы называется газовым разрядом.

[2]) Подобно этому в потоке газа на хаотическое тепловое движение молекул накладывается упорядоченное движение.

Количественной характеристикой электрического тока служит величина заряда, переносимого через рассматриваемую поверхность в единицу времени. Ее называют **силой тока**. Отметим, что сила тока есть по существу поток заряда через поверхность (ср. с потоком жидкости, потоком энергии и т. п.).

Если за время dt через поверхность переносится заряд dq, то сила тока равна

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{5.1}$$

Электрический ток может быть обусловлен движением как положительных, так и отрицательных носителей. Перенос отрицательного заряда в одном направлении эквивалентен переносу такого же по величине положительного заряда в противоположном направлении. Если ток создается носителями обоих знаков, причем за время dt через данную поверхность положительные носители переносят заряд dq^+ в одном направлении, а отрицательные — заряд dq^- в противоположном, то

$$I = \frac{dq^+}{dt} + \frac{|dq^-|}{dt}.$$

За направление тока принимается направление, в котором перемещаются положительные носители.

Электрический ток может быть распределен по поверхности, через которую он течет, неравномерно. Более детально ток можно охарактеризовать с помощью вектора плотности тока $\mathbf{j}$. Этот вектор численно равен силе тока dI через расположенную в данной точке перпендикулярную к направлению движения носителей площадку $dS_\perp$, отнесенной к величине этой площадки:

$$j = \frac{dI}{dS_\perp}. \tag{5.2}$$

За направление $\mathbf{j}$ принимается направление вектора скорости $\mathbf{u}^+$ упорядоченного движения положительных носителей (или направление, противоположное направлению вектора $\mathbf{u}^-$).

Поле вектора плотности тока можно изобразить с помощью линий тока, которые строятся так же, как и линии тока в текущей жидкости, линии вектора $\mathbf{E}$ и т. д.

Зная вектор плотности тока в каждой точке пространства, можно найти силу тока I через любую поверхность S:

$$I = \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S}. \tag{5.3}$$

Из (5.3) следует, что сила тока есть поток вектора плотности тока через поверхность (см. формулу (1.73)).

Пусть в единице объема содержится n^+ положительных носителей и n^- отрицательных. Алгебраическая величина зарядов носителей равна соответственно e^+ и e^-. Если под действием поля носители приобретают средние скорости u^+ и u^-, то за единицу времени через единичную площадку пройдет n^+u^+ положительных носителей[3]), которые перенесут заряд $e^+n^+u^+$. Аналогично отрицательные носители перенесут в противоположную сторону заряд $e^-n^-u^-$. Таким образом, для плотности тока получается следующее выражение:

$$j = e^+n^+u^+ + |e^-|n^-u^-. \tag{5.4}$$

Этому выражению можно придать векторную форму:

$$\mathbf{j} = e^+n^+\mathbf{u}^+ + e^-\, n^-\mathbf{u}^- \tag{5.5}$$

(оба слагаемых имеют одинаковое направление: вектор $\mathbf{u}^-$ направлен противоположно вектору $\mathbf{j}$, при умножении его на отрицательный скаляр e^- получается вектор одинакового направления с $\mathbf{j}$).

Произведение e^+n^+ дает плотность заряда положительных носителей ρ^+, аналогично e^-n^- дает плотность заряда отрицательных носителей ρ^-. Следовательно, выражение (5.5)можно написать в виде

$$\mathbf{j} = \rho^+\mathbf{u}^+ + \rho^-\mathbf{u}^-. \tag{5.6}$$

Ток, не изменяющийся со временем, называется постоянным. Для постоянного тока справедливо соотношение

$$I = \frac{q}{t}, \tag{5.7}$$

[3]) Выражение для числа молекул, пролетающих в единицу времени через единичную площадку, содержит, кроме того, множитель $1/4$, обусловленный тем, что молекулы движутся хаотически (см. формулу (2.23) кн. 3). В данном случае этого множителя нет, так как все носители данного знака движутся упорядоченно в одном направлении.

где q — заряд, переносимый через рассматриваемую поверхность за конечное время t.

В СИ единица силы тока а м п е р (А)[4]) является основной. Ее определение будет дано позже (см. § 6.1). Единица заряда к у л о н определяется как заряд, переносимый за 1 с через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А.

За единицу силы тока в СГСЭ-системе принимается сила такого тока, при котором через данную поверхность переносится за 1 с одна СГСЭ-единица заряда. Из соотношений (5.7) и (1.8) следует, что

$$1\text{А} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ-ед. силы тока.} \tag{5.8}$$

5.2. Уравнение непрерывности

Рассмотрим в некоторой среде, в которой течет ток, воображаемую замкнутую поверхность S (рис. 5.1). Выражение $\oint_S \mathbf{j}\,d\mathbf{S}$ дает заряд, выходящий в единицу времени

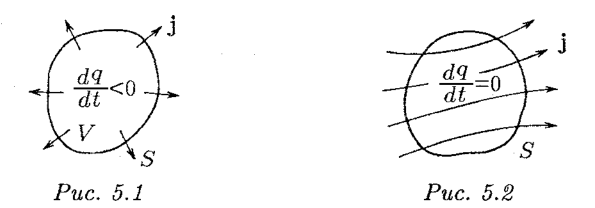


Рис. 5.1 *Рис. 5.2*

из объема V, ограниченного поверхностью S. В силу сохранения заряда эта величина должна быть равна скорости убывания заряда q, содержащегося в данном объеме:

$$\oint_S \mathbf{j}\,d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}.$$

Представив q в виде $\int_V \rho\,dV$, получим соотношение

$$\oint_S \mathbf{j}\,d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\,dV = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV. \tag{5.9}$$

[4]) Название дано в честь французского ученого Андре Мари Ампера (1775–1836).

Под знаком интеграла мы написали частную производную ρ по t, поскольку плотность заряда может зависеть не только от времени, но и от координат (интеграл $\int \rho\, dV$ есть функция только времени). Преобразуем левую часть равенства (5.9) по теореме Остроградского–Гаусса. В результате получим

$$\int\limits_V \nabla \mathbf{j}\, dV = -\int\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV. \tag{5.10}$$

Равенство (5.10) должно выполняться при произвольном выборе объема V, по которому берутся интегралы. Это возможно лишь в том случае, если в каждой точке пространства выполняется условие

$$\nabla \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{5.11}$$

Соотношение (5.11) называют **уравнением непрерывности**. Оно (равно как и уравнение (5.9)) выражает закон сохранения заряда. Согласно (5.11) в точках, которые являются источниками вектора $\mathbf{j}$, происходит убывание заряда.

В случае стационарного тока потенциал в разных точках, плотность заряда и другие величины являются неизменными. Следовательно, для стационарного (т. е. постоянного) тока уравнение (5.11) имеет вид

$$\nabla \mathbf{j} = 0. \tag{5.12}$$

Таким образом, в случае постоянного тока вектор $\mathbf{j}$ не имеет источников. Это означает, что линии тока нигде не начинаются и нигде не заканчиваются. Следовательно, линии постоянного тока всегда замкнуты. Соответственно $\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{S}$ равен нулю. Поэтому для постоянного тока картина, аналогичная изображенной на рис. 5.1, имеет вид, показанный на рис. 5.2.

5.3. Электродвижущая сила

Если в проводнике создать электрическое поле и не принять мер для его поддержания, то перемещение носителей тока приведет очень быстро к тому, что поле внутри проводника исчезнет и ток прекратится. Для того чтобы поддерживать ток достаточно длительное время, нужно от

конца проводника с меньшим потенциалом (носители тока предполагаются положительными) непрерывно отводить приносимые сюда током заряды, а к концу с большим потенциалом непрерывно их подводить (рис. 5.3). Иными словами, необходимо осуществить круговорот зарядов, при котором они двигались бы по замкнутому пути. Это согласуется с тем, что линии постоянного тока замкнуты (см. предыдущий параграф).

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля равна нулю. Поэтому в замкнутой цепи наряду с участками, на которых положительные носители движутся в сторону убывания потенциала φ, должны иметься участки, на которых перенос положительных зарядов происходит в направлении возрастания φ, т. е. против сил электростатического поля (см. изображенную штриховой линией часть цепи на рис. 5.3). Перемещение носителей на этих участках возможно лишь с помощью сил неэлектростатического происхождения, называемых **сторонними силами**.

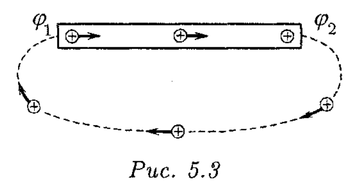


Рис. 5.3

Таким образом, для поддержания тока необходимы сторонние силы, действующие либо на всем протяжении цепи, либо на отдельных ее участках. Эти силы могут быть обусловлены химическими процессами, диффузией носителей тока в неоднородной среде или через границу двух разнородных веществ, электрическими (но не электростатическими) полями, порождаемыми меняющимися во времени магнитными полями (см. § 9.1), и т. д.

Сторонние силы можно охарактеризовать работой, которую они совершают над перемещающимися по цепи зарядами. Величина, равная работе сторонних сил над единичным положительным зарядом, называется **элекродвижущей силой** (ЭДС) $\mathcal{E}$, действующей в цепи или на ее участке. Следовательно, если работа сторонних сил над зарядом q равна A, то

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q}. \tag{5.13}$$

Из сопоставления формул (5.13) и (1.30) вытекает, что размерность ЭДС совпадает с размерностью потенциала. Поэтому $\mathcal{E}$ измеряется в тех же единицах, что и φ.

Стороннюю силу $\mathbf{F}_{\text{ст}}$, действующую на заряд q, можно представить в виде

$$\mathbf{F}_{\text{ст}} = \mathbf{E}^* q. \tag{5.14}$$

Векторную величину $\mathbf{E}^*$ называют напряженностью поля сторонних сил. Работа сторонних сил над зарядом q на участке цепи 1–2 равна

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}_{\text{ст}}\, d\mathbf{l} = q \int_1^2 \mathbf{E}^*\, d\mathbf{l}.$$

Разделив эту работу на q, получим ЭДС, действующую на данном участке:

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}^*\, d\mathbf{l}. \tag{5.15}$$

Аналогичный интеграл, вычисленный для замкнутой цепи, даст ЭДС, действующую в этой цепи:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}^*\, d\mathbf{l}. \tag{5.16}$$

Таким образом, ЭДС, действующая в замкнутой цепи, может быть определена как циркуляция вектора напряженности сторонних сил.

Кроме сторонних сил, на заряд действуют силы электростатического поля $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$. Следовательно, результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд q, равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_{\text{ст}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*).$$

Работа, совершаемая этой силой над зарядом q на участке цепи 1–2, определяется выражением

$$A_{12} = q\int_1^2 \mathbf{E}\, d\mathbf{l} + q\int_1^2 \mathbf{E}^*\, d\mathbf{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\mathcal{E}_{12}. \tag{5.17}$$

Величина, численно равная работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется падением напряжения или просто напряжением U на данном участке цепи. В соответствии с формулой (5.17)

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \tag{5.18}$$

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется однородным. Участок, на котором на носители тока действуют сторонние силы, называется неоднородным. Для однородного участка цепи

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, \tag{5.19}$$

т. е. напряжение совпадает с разностью потенциалов на концах участка.

5.4. Закон Ома. Сопротивление проводников

Ом[5]) экспериментально установил закон, согласно которому *сила тока, текущего по однородному* (в смысле отсутствия сторонних сил) *металлическому проводнику, пропорциональна падению напряжения U на проводнике*:

$$I = \frac{1}{R}U. \tag{5.20}$$

Напомним, что в случае однородного проводника напряжение U совпадает с разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ (см. (5.18)).

Обозначенная в формуле (5.20) буквой R величина называется электрическим сопротивлением проводника. Единицей сопротивления служит ом, равный сопротивлению такого проводника, в котором при напряжении 1 В течет ток силой 1 А.

Величина сопротивления зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств материала, из которого он сделан. Для однородного цилиндрического проводника

$$R = \rho\frac{l}{S}, \tag{5.21}$$

где l — длина проводника, S — площадь его поперечного сечения, ρ — зависящий от свойств материала коэффициент, называемый удельным электрическим сопротивлением вещества. Если $l = 1$ и $S = 1$, то R численно равно ρ. В СИ ρ измеряется в ом-метрах (Ом·м).

Найдем связь между векторами $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ в одной и той же точке проводника. В изотропном проводнике упорядочен-

---

[5]) Георг Симон Ом (1787–1854)— немецкий физик.

ное движение носителей тока происходит в направлении вектора **E**. Поэтому направления векторов **j** и **E** совпадают [6]). Выделим мысленно в окрестности некоторой точки элементарный цилиндрический объем с образующими, параллельными векторам **j** и **E** (рис. 5.4). Через поперечное сечение цилиндра течет ток силой $j\,dS$. Напряжение, приложенное к цилиндру, равно $E\,dl$, где E — напряженность поля в данном месте. Наконец, сопротивление цилиндра, согласно формуле (5.21), равно $\rho(dl/dS)$. Подставив эти значения в формулу (5.20), придем к соотношению

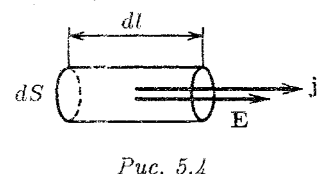


Рис. 5.4

$$j\,dS = \frac{dS}{\rho\,dl}E\,dl, \quad \text{или} \quad j = \frac{1}{\rho}E.$$

Воспользовавшись тем, что векторы **j** и **E** имеют одинаковое направление, можно написать

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho}\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}. \tag{5.22}$$

Эта формула выражает закон Ома в дифференциальной форме.

Фигурирующая в (5.22) обратная ρ величина σ называется **удельной электрической проводимостью** материала. Единица, обратная ому, называется **сименсом** (См) [7]). Соответственно единицей σ является **сименс на метр** (См/м).

Допустим для простоты, что в проводнике имеются носители лишь одного знака. Согласно формуле (5.5) плотность тока в этом случае равна

$$\mathbf{j} = en\mathbf{u}. \tag{5.23}$$

Сравнение этого выражения с формулой (5.22) приводит к заключению, что скорость упорядоченного движения носителей тока пропорциональна напряженности поля **E**, т. е. силе, сообщающей носителям упорядоченной движение.

---

[6]) В анизотропных телах направления векторов **j** и **E**, вообще говоря, не совпадают. В таких телах связь между **j** и **E** осуществляется с помощью тензора проводимости.

[7]) В честь немецкого электротехника Эрнста Вернера Сименса (1816–1892).

Пропорциональность скорости приложенной к телу силе наблюдается в тех случаях, когда кроме силы, вызвавшей движение, на тело действует сила сопротивления среды. Эта сила вызывается взаимодействием носителей тока с частицами, из которых построено вещество проводника. Наличие силы сопротивления упорядоченному движению носителей тока обусловливает электрическое сопротивление проводника.

Способность вещества проводить электрический ток характеризуется его удельным сопротивлением ρ либо удельной проводимостью σ. Эти величины определяются химической природой вещества и условиями, в частности температурой, при которых оно находится.

Для большинства металлов при температуре, близкой к комнатной, ρ изменяется пропорционально термодинамической температуре T:

$$\rho \sim T. \tag{5.24}$$

При низких температурах наблюдаются отступления от этой закономерности (рис. 5.5). В большинстве случаев зависимость ρ от T следует кривой *1*. Остаточное сопротивление $\rho_{\text{ост}}$ в сильной степени зависит от чистоты материала и наличия остаточных механических напряжений в образце. Поэтому после отжига $\rho_{\text{ост}}$ заметно уменьшается. У абсолютно чистого металла с идеально правильной кристаллической решеткой при абсолютном нуле $\rho = 0$. У большой группы металлов и сплавов при температуре порядка нескольких кельвинов сопротивление скачком обращается в нуль (кривая *2* на рис. 5.5). Впервые это явление, названное **сверхпроводимостью**, было обнаружено в 1911 г. Камерлинг-Оннесом[8]) для ртути. В дальнейшем сверхпроводимость была обнаружена у свинца, олова, цинка, алюминия и других металлов, а также у ряда сплавов. Для каждого сверхпроводника имеется своя критическая температура $T_{\text{к}}$, при которой он переходит в сверхпроводящее состояние. При действии на сверхпроводник магнитного поля сверхпроводящее состо-

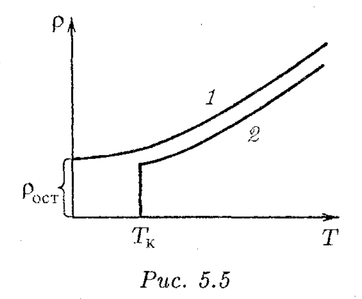


Рис. 5.5

[8]) Хейке Камерлинг-Оннес (1853–1926) — нидерландский физик.

яние нарушается. Критическое поле $B_{\text{к}}$ [9]), разрушающее сверхпроводимость, равно нулю при $T = T_{\text{к}}$ и растет с понижением температуры.

Полное теоретическое объяснение сверхпроводимости было дано академиком Н.Н.Боголюбовым и независимо от него Дж.Бардином, Л.Купером и Дж.Шриффером (см. § 8.5 кн. 5).

Зависимость электрического сопротивления от температуры положена в основу термометров сопротивления. Такой термометр представляет собой металлическую (обычно платиновую) проволочку, намотанную на фарфоровый или слюдяной каркас. Проградуированный по постоянным температурным точкам термометр сопротивления позволяет измерять с погрешностью порядка нескольких сотых кельвина как низкие, так и высокие температуры. В последнее время все большее применение находят термометры сопротивления из полупроводников.

5.5. Закон Ома для неоднородного участка цепи

На неоднородном участке цепи на носители тока действуют, кроме электростатических сил $e\mathbf{E}$, сторонние силы $e\mathbf{E}^*$. Сторонние силы способны вызывать упорядоченное движение носителей тока в той же мере, что и силы электростатические. В предыдущем параграфе мы выяснили, что в однородном проводнике средняя скорость упорядоченного движения носителей тока пропорциональна электростатической силе $e\mathbf{E}$. Очевидно, что там, где, кроме электростатической силы, на носители действуют сторонние силы, средняя скорость упорядоченного движения носителей будет пропорциональна суммарной силе $e\mathbf{E} + e\mathbf{E}^*$. Соответственно плотность тока в этих точках оказывается пропорциональной сумме напряженностей $\mathbf{E} + \mathbf{E}^*$:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*). \qquad (5.25)$$

Формула (5.25) обобщает формулу (5.22) на случай неоднородного проводника. Она выражает в дифференциальной форме закон Ома для неоднородного участка цепи.

От закона в дифференциальной форме можно перейти к интегральной форме закона Ома. Рассмотрим неоднородный участок цепи. Допустим, что внутри этого участка существует линия (мы будем называть ее контуром тока),

[9]) Буквой B обозначают индукцию магнитного поля (см. § 6.2).

удовлетворяющая следующим условиям: 1) в каждом сечении, перпендикулярном к контуру, величины $\mathbf{j}$, σ, $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}^*$ имеют с достаточной точностью одинаковые значения; 2) векторы $\mathbf{j}, \mathbf{E}$ и $\mathbf{E}^*$ в каждой точке направлены по касательной к контуру. Поперечное сечение проводника может быть непостоянным (рис. 5.6).

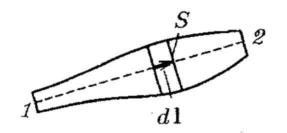


Рис. 5.6

Выберем произвольно направление движения по контуру. Пусть выбранное направление соответствует перемещению от конца *1* к концу *2* участка цепи (направление *1–2*). Спроецируем векторы, входящие в соотношение (5.25), на элемент контура $d\mathbf{l}$. В результате получим

$$j_l = \sigma(E_l + E_l^*). \tag{5.26}$$

В силу сделанных предположений проекция каждого из векторов равна модулю вектора, взятому со знаком плюс или минус в зависимости от того, как направлен вектор по отношению к $d\mathbf{l}$. Например, $j_l = j$, если ток течет в направлении *1–2*, и $j_l = -j$, если ток течет в направлении *2–1*.

Вследствие сохранения заряда сила постоянного тока в каждом сечении должна быть одинаковой. Поэтому величина $I = j_l S$ постоянна вдоль контура. Силу тока в данном случае нужно рассматривать как алгебраическую величину. Напомним, что направление *1–2* мы выбрали произвольно. Поэтому, если ток течет в выбранном направлении, его следует считать положительным; если же ток течет в противоположном направлении (т. е. от конца *2* к концу *1*), его силу следует считать отрицательной.

Заменим в (5.26) j_l отношением I/S, а проводимость σ — удельным сопротивлением ρ. В итоге получится соотношение

$$I\frac{\rho}{S} = E_l + E_l^*.$$

Умножим это соотношение на dl и проинтегрируем вдоль контура:

$$I\int_1^2 \rho\frac{dl}{S} = \int_1^2 E_l\,dl + \int_1^2 E_l^*\,dl.$$

Выражение $\rho dl/S$ представляет собой сопротивление участ-

ка контура длины dl, а интеграл от этого выражения — сопротивление R участка цепи. Первый интеграл в правой части дает $\varphi_1 - \varphi_2$, а второй интеграл — ЭДС $\mathcal{E}_{12}$, действующую на участке. Таким образом, мы приходим к формуле

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \tag{5.27}$$

ЭДС $\mathcal{E}_{12}$, как и сила тока I, есть величина алгебраическая. В случае, когда ЭДС способствует движению положительных носителей тока в выбранном направлении (в направлении *1–2*), $\mathcal{E}_{12} > 0$. Если ЭДС препятствует движению положительных носителей в данном направлении, $\mathcal{E}_{12} < 0$.

Запишем (5.27) в виде

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}. \tag{5.28}$$

Эта формула выражает закон Ома для неоднородного участка цепи. Положив $\varphi_1 = \varphi_2$, получим выражение закона Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \tag{5.29}$$

Здесь $\mathcal{E}$ — ЭДС, действующая в цепи, R — суммарное сопротивление всей цепи.

5.6. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

Расчет разветвленных цепей значительно упрощается, если пользоваться правилами, сформулированными Кирхгофом[10]. Этих правил два. Первое из них относится к узлам цепи. Узлом называется точка, в которой сходятся более чем два проводника (рис. 5.7). Ток, текущий к узлу, считается имеющим один знак (плюс или минус), текущий от узла — имеющим другой знак (минус или плюс).

Первое правило Кирхгофа гласит, что *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю*:

$$\sum I_k = 0 \tag{5.30}$$

[10]) Густав Роберт Кирхгоф (1824–1887) — немецкий физик.

Это правило вытекает из уравнения непрерывности, т. е., в конечном счете, из закона сохранения заряда. Для постоянного тока $\nabla \mathbf{j}$ всюду равна нулю (см. (5.12)). Следовательно, поток вектора $\mathbf{j}$ (т. е. алгебраическая сумма токов, текущих через окружающую узел воображаемую замкнутую поверхность) должен быть равен нулю.

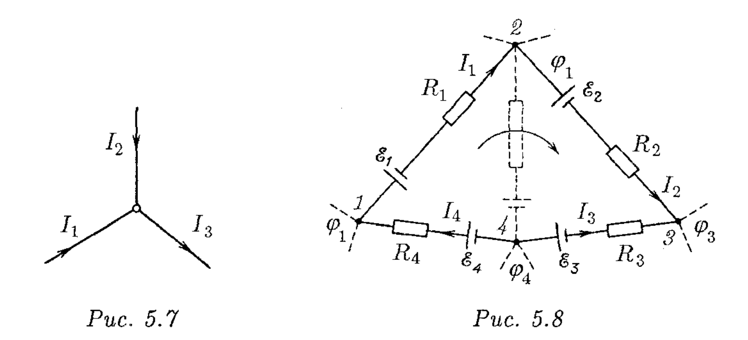


Рис. 5.7 *Рис. 5.8*

Уравнение (5.30) можно написать для каждого из N узлов цепи. Однако независимыми являются только $N-1$ уравнений, N-е будет следствием из них.

Второе правило относится к любому выделенному в разветвленной цепи замкнутому контуру (см., например, контур *1–2–3–4–1* на рис. 5.8). Зададимся направлением обхода (например, по часовой стрелке, как указано на рисунке) и применим к каждому из неразветвленных участков контура закон Ома:

$$I_1R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1, \quad I_2R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_2,$$
$$I_3R_3 = \varphi_3 - \varphi_4 + \mathcal{E}_3, \quad I_4R_4 = \varphi_4 - \varphi_1 + \mathcal{E}_4.$$

При сложении этих выражений потенциалы взаимно уничтожаются и получается уравнение

$$\sum I_kR_k = \sum \mathcal{E}_k, \tag{5.31}$$

которое выражает второе правило Кирхгофа.

Уравнение (5.31) может быть составлено для всех замкнутых контуров, которые можно выделить мысленно в данной разветвленной цепи. Однако независимыми будут только уравнения для тех контуров, которые нельзя получить наложением других контуров один на другой. Так,

например, для цепи, изображенной на рис. 5.9, можно составить три уравнения:

1) для контура *1–2–3–6–1*,
2) для контура *3–4–5–6–3*,
3) для контура *1–2–3–4–5–6–1*.

Последний контур получается наложением первых двух. Поэтому уравнения не будут независимыми. В качестве независимых можно взять любые два уравнения из трех.

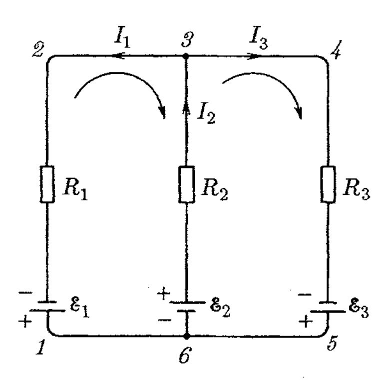


Рис. 5.9

При составлении уравнений второго правила Кирхгофа токам и ЭДС нужно приписывать знаки в соответствии с выбранным направлением обхода. Например, ток I_1 на рис. 5.9 нужно считать отрицательным, так как он течет навстречу выбранному направлению обхода. ЭДС $\mathcal{E}_1$ также нужно приписать знак минус, так как она действует в направлении, противоположном направлению обхода, и т. д. Направления обхода в каждом из контуров можно выбирать совершенно произвольно и независимо от выбора направлений в других контурах. При этом может случиться, что один и тот же ток либо одна и та же ЭДС войдет в разные уравнения с различными знаками (так получается с током I_2 на рис. 5.9 при указанных направлениях обхода в контурах). Это, однако, не имеет никакого значения, потому что изменение направления обхода вызывает лишь изменение всех знаков в уравнении (5.31) на обратные.

Составляя уравнения, следует помнить, что через любое сечение неразветвленного участка цепи течет один и тот же ток. Например, на участке от точки *6* до источника тока $\mathcal{E}_2$ течет такой же ток I_2, как на участке от источника $\mathcal{E}_2$ до точки *3*.

Число независимых уравнений, составленных в соответствии с первым и вторым правилами Кирхгофа, оказывается равным числу различных токов, текущих в разветвленной цепи. Поэтому, если заданы ЭДС и сопротивления для всех неразветвленных участков, то могут быть вычислены все токи. Можно решить и задачу иного рода, на-

пример найти ЭДС, которые нужно включить в каждый из участков цепи, чтобы получить при заданных сопротивлениях нужные токи.

5.7. Мощность тока

Рассмотрим произвольный участок цепи постоянного тока, к концам которого приложено напряжение U. За время t через каждое сечение проводника проходит заряд $q = It$. Это равносильно тому, что заряд It переносится за время t из одного конца проводника в другой. При этом силы электростатического поля и сторонние силы, действующие на данном участке, совершают работу

$$A = Uq = UIt \tag{5.32}$$

(напомним, что напряжение U определяется как работа, совершаемая электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда; см. формулу(5.18)).

Разделив работу A на время t, за которое она совершается, получим мощность, развиваемую током на рассматриваемом участке цепи:

$$P = UI = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \mathcal{E}_{12}I. \tag{5.33}$$

Эта мощность может расходоваться на совершение рассматриваемым участком цепи работы над внешними телами (для этого участок должен перемещаться в пространстве), на протекание химических реакций и, наконец, на нагревание данного участка цепи.

Отношение мощности ΔP, развиваемой током в объеме проводника ΔV, к этому объему называется **удельной мощностью тока** $P_{\text{уд}}$, отвечающей данной точке проводника. По определению удельная мощность равна

$$P_{\text{уд}} = \frac{\Delta P}{\Delta V}. \tag{5.34}$$

Условно говоря, удельная мощность есть мощность, развиваемая в единице объема проводника.

Выражение для удельной мощности тока можно получить, исходя из следующих соображений. Сила $e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$ развивает при движении носителя тока мощность, равную

$$P' = e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)(\mathbf{v} + \mathbf{u}).$$

Усредним это выражение по носителям, заключенным в объеме ΔV, в пределах которого $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}^*$ можно считать постоянными. В результате получим

$$\langle P' \rangle = e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)\langle \mathbf{v} + \mathbf{u} \rangle =$$
$$= e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)\langle \mathbf{v} \rangle + e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)\langle \mathbf{u} \rangle = e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)\langle \mathbf{u} \rangle$$

(напомним, что $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$).

Мощность ΔP, развиваемую в объеме ΔV, можно найти, умножив $\langle P' \rangle$ на число носителей тока в этом объеме, которое равно $n\Delta V$ (n — число носителей в единице объема). Таким образом,

$$\Delta P = \langle P' \rangle n\Delta V = e(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)\langle \mathbf{u} \rangle n\Delta V = \mathbf{j}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)\Delta V$$

(см. 5.23). Отсюда

$$P_{\text{уд}} = \mathbf{j}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*). \tag{5.35}$$

Это выражение представляет собой дифференциальную форму интегрального выражения(5.33).

5.8. Закон Джоуля–Ленца

В случае, когда проводник неподвижен и химических превращений в нем не совершается, работа тока (5.32) затрачивается на увеличение внутренней энергии проводника, в результате чего проводник нагревается. Принято говорить, что при протекании тока в проводнике выделяется теплота

$$Q = UIt.$$

Заменив в соответствии с законом Ома U через RI, получим формулу

$$Q = RI^2t. \tag{5.36}$$

Соотношение (5.36) было установлено экспериментально Джоулем и независимо от него Ленцем[11]) и носит название закона Джоуля–Ленца.

[11]) Эмилий Христианович Ленц (1804–1865) — русский физик и электротехник.

Если сила тока изменяется со временем, то количество теплоты, выделяющееся за время t, вычисляется по формуле

$$Q = \int_0^t RI^2\,dt. \tag{5.37}$$

От формулы (5.36), определяющей теплоту, выделяющуюся во всем проводнике, можно перейти к выражению, характеризующему выделение теплоты в различных местах проводника. Выделим в проводнике таким же образом, как это было сделано при выводе формулы (5.22), элементарный объем в виде цилиндра (см. рис. 5.4). Согласно закону Джоуля–Ленца за время dt в этом объеме выделится теплота

$$dQ = RI^2\,dt = \frac{\rho\,dl}{dS}(j\,dS)^2\,dt = \rho j^2\,dV\,dt \tag{5.38}$$

($dV = dS\,dl$— элементарный объем).

Разделив выражение (5.38) на dV и dt, найдем количество теплоты, выделяющееся в единице объема в единицу времени:

$$Q_{\text{уд}} = \rho j^2. \tag{5.39}$$

По аналогии с наименованием величины (5.34) величину $Q_{\text{уд}}$ можно назвать у д е л ь н о й т е п л о в о й м о щ н о с т ь ю т о к а.

Формула (5.39) представляет собой дифференциальную форму закона Джоуля–Ленца. Ее можно получить из соотношения (5.35). Заменив в (5.35) $\mathbf{E} + \mathbf{E}^*$ через $\mathbf{j}/\sigma = \rho\mathbf{j}$ (см. (5.25)), придем к выражению

$$P_{\text{уд}} = \rho\mathbf{j}^2,$$

которое совпадает с (5.39).

Отметим, что Джоуль и Ленц установили свой закон для однородного участка цепи. Однако, как следует из выкладок, приведенных в данном параграфе, формулы (5.36) и (5.39) справедливы и для неоднородного участка при условии, что действующие в нем сторонние силы имеют нехимическое происхождение.

Глава 6

Магнитное поле в вакууме

6.1. Взаимодействие токов

Опыт показывает, что электрические токи взаимодействуют между собой. Например, два тонких прямолинейных параллельных проводника, по которым текут токи (мы будем называть их прямыми токами), притягивают друг друга, если токи в них имеют одинаковое направление, и отталкивают, если токи противоположны. Сила взаимодействия, приходящаяся на единицу длины каждого из параллельных проводников, прямо пропорциональна токам в них I_1 и I_2 и обратно пропорциональна расстоянию b между ними:

$$F_{\text{ед}} = k\frac{2I_1I_2}{b}. \qquad (6.1)$$

По соображениям, которые станут ясными в дальнейшем, коэффициент пропорциональности мы обозначили через $2k$.

Закон взаимодействия токов был установлен в 1820 г. Ампером. Общее выражение этого закона, пригодное для проводников любой формы, будет дано в § 6.6.

На основании соотношения (6.1) устанавливается единица силы тока в СИ и в абсолютной электромагнитной системе единиц (СГСМ-системе). Единица силы тока в СИ — ампер — определяется как сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Единицу заряда, называемую кулоном, определяют как заряд, проходящий за 1 с через поперечное сечение проводника, по которому течет постоянный ток силой 1 А. В соответствии с этим кулон называют также ампер-секундой (А · с).

В рационализованном виде формула (6.1) записывается следующим образом:

$$F_{\text{ед}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{b}, \qquad (6.2)$$

где μ_0 — так называемая магнитная постоянная (ср. с формулой (1.11)). Чтобы найти числовое значение μ_0, воспользуемся тем, что согласно определению ампера при $I_1 = I_2 = 1$ А и $b = 1$ м сила $F_{\text{ед}}$ равна $2 \cdot 10^{-7}$ Н/м. Подставим эти значения в формулу (6.2):

$$2 \cdot 10^{-7} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{1}.$$

Отсюда

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1{,}26 \cdot 10^{-6}\,\text{Гн/м}^{1)}. \qquad (6.3)$$

Коэффициент k в формуле (6.1) можно сделать равным единице за счет выбора единицы силы тока. Так устанавливается абсолютная электромагнитная единица силы тока (СГСМ-ед. силы тока), которая определяется как сила такого тока, который, протекая по тонкому прямолинейному бесконечно длинному проводу, действует на равный и параллельный ему прямой ток, отстоящий на 1 см, с силой 2 дин на каждый сантиметр длины.

В СГСЭ-системе k оказывается отличной от единицы размерной величиной. Согласно формуле (6.1) размерность k определяется следующим выражением:

$$[k] = \frac{[F_{\text{ед}}b]}{[I]^2} = \frac{[F]}{[I]^2}. \qquad (6.4)$$

Мы учли, что размерность $F_{\text{ед}}$ есть размерность силы, деленная на размерность длины; поэтому размерность произведения $F_{\text{ед}}b$ равна размерности силы. Согласно формулам (1.7) и (5.7)

$$[F] = \frac{[q]^2}{\mathrm{L}^2}; \quad [I] = \frac{[q]}{\mathrm{T}}.$$

Подставив эти значения в выражение (6.4), найдем, что

$$[k] = \frac{\mathrm{T}^2}{\mathrm{L}^2}.$$

[1]) Генри на метр (см. § 8.5).

Следовательно, в СГСЭ-системе k можно представить в виде

$$k = \frac{1}{c^2}, \tag{6.5}$$

где c — имеющая размерность скорости величина, называемая электродинамической постоянной. Чтобы найти ее числовое значение, воспользуемся соотношением (1.8) между кулоном и СГСЭ-единицей заряда, установленным опытным путем. Сила $2 \cdot 10^{-7}$ Н/м эквивалентна $2 \cdot 10^{-4}$ дин/см. Согласно формуле (6.1) с такой силой взаимодействуют токи по $3 \cdot 10^9$ СГСЭ-единиц (т. е. 1 А) каждый при $b = 100$ см. Таким образом,

$$2 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{c^2} \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^9}{100},$$

откуда

$$c = 3 \cdot 10^{10}\ \text{см/с} = 3 \cdot 10^8\ \text{м/с}. \tag{6.6}$$

Значение электродинамической постоянной совпадает со значением скорости света в вакууме. Из теории Максвелла вытекает существование электромагнитных волн, скорость которых в вакууме равна электродинамической постоянной c. Совпадение c со скоростью света в вакууме дало Максвеллу основание предположить, что свет есть электромагнитная волна.

Значение k в формуле (6.1) равно единице в СГСМ-системе и $1/c^2 = 1/(3 \cdot 10^{10})^2 \text{с}^2/\text{см}^2$ в СГСЭ-системе. Отсюда следует, что ток силой 1 СГСМ-единиц эквивалентен току силой $3 \cdot 10^{10}$ СГСЭ-единиц:

$$1\ \text{СГСМ-ед. силы тока} = 3 \cdot 10^{10}\ \text{СГСЭ-ед. силы тока} = 10\ \text{А}. \tag{6.7}$$

Умножив это соотношение на 1 с, получим

$$1\ \text{СГСМ-ед. заряда} = 3 \cdot 10^{10}\ \text{СГСЭ-ед. заряда} = 10\ \text{Кл}. \tag{6.8}$$

Таким образом,

$$I_{\text{СГСМ}} = \frac{1}{c} I_{\text{СГСЭ}}. \tag{6.9}$$

Соответственно

$$q_{\text{СГСМ}} = \frac{1}{c} q_{\text{СГСЭ}}. \tag{6.10}$$

Между постоянными ε_0, μ_0 и c имеется связь. Для установления этой связи найдем размерность и числовое

значение произведения $\varepsilon_0\mu_0$. В соответствии с формулой (1.11) размерность ε_0 равна

$$[\varepsilon_0] = \frac{[q]^2}{\mathrm{L}^2[F]}. \tag{6.11}$$

Согласно (6.2)

$$[\mu_0] = \frac{[F_{\text{ед}}b]}{[I]^2} = \frac{[F]\mathrm{T}^2}{[q]^2}. \tag{6.12}$$

Перемножив выражения (6.11) и (6.12), получим

$$[\varepsilon_0\mu_0] = \frac{\mathrm{T}^2}{\mathrm{L}^2} = \frac{1}{[v]^2} \tag{6.13}$$

(v — скорость).

С учетом (1.12) и (6.3) числовое значение произведения $\varepsilon_0\mu_0$ равно

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7} = \frac{1}{(3\cdot 10^8)^2}\,\frac{\text{с}^2}{\text{м}^2}. \tag{6.14}$$

Наконец, приняв во внимание (6.6), (6.13) и (6.14), получим интересующую нас связь:

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}. \tag{6.15}$$

6.2. Магнитное поле

Взаимодействие токов осуществляется через поле, называемое м а г н и т н ы м. Это название происходит от того, что, как обнаружил в 1820 г. Эрстед[2]), поле, возбуждаемое током, оказывает ориентирующее действие на магнитную стрелку. В опыте Эрстеда проволока, по которой тек ток, была натянута над магнитной стрелкой, вращающейся на игле. При включении тока стрелка устанавливалась перпендикулярно к проволоке. Изменение направления тока заставляло стрелку повернуться в противоположную сторону.

Из опыта Эрстеда следует, что магнитное поле имеет направленный характер и должно характеризоваться векторной величиной. Эту величину принято обозначать буквой **B**. Логично было бы по аналогии с напряженностью

---

[2]) Ханс Кристиан Эрстед (1777–1851) — датский физик.

электрического поля **E** назвать **B** напряженностью магнитного поля. Однако по историческим причинам основную силовую характеристику магнитного поля назвали магнитной индукцией. Название же «напряженность магнитного поля» оказалось присвоенным вспомогательной величине **H**, аналогичной вспомогательной характеристике **D** электрического поля.

Магнитное поле, в отличие от электрического, не оказывает действия на покоящийся заряд. Сила возникает лишь тогда, когда заряд движется.

Проводник с током представляет собой электрически нейтральную систему зарядов, в которой заряды одного знака движутся в одну сторону, а заряды другого знака — в противоположную сторону (либо покоятся). Отсюда следует, что магнитное поле порождается движущимися зарядами.

Итак, движущиеся заряды (токи) изменяют свойства окружающего их пространства — создают в нем магнитное поле. Это поле проявляется в том, что на движущиеся в нем заряды (токи) действуют силы.

Опыт дает, что для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции: *поле* **B**, *порождаемое несколькими движущимися зарядами (токами), равно векторной сумме полей* $\mathbf{B}_i$, *порождаемых каждым зарядом (током) в отдельности* (ср. с (1.19)):

$$\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}_i. \qquad (6.16)$$

Подобно тому, как для исследования электрического поля мы использовали пробный точечный заряд, применим для исследования магнитного поля пробный ток, циркулирующий в плоском замкнутом контуре очень малых размеров. Ориентацию контура в пространстве будем характеризовать направлением нормали к контуру, связанной с направлением тока правилом правого винта (рис. 6.1). Такую нормаль будем называть положительной.

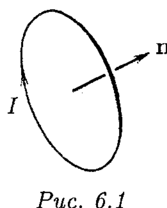


Рис. 6.1

Поместив пробный контур в магнитное поле, мы обнаружим, что поле устанавливает контур положительной нормалью в определенном направлении. Примем это направление за направление поля в данной точке. Если контур повернуть так, чтобы направления нормали и поля не совпадали, возникает вращающий момент, стремящийся

вернуть контур в равновесное положение. Модуль момента зависит от угла α между нормалью и направлением поля, достигая наибольшего значения M_{max} при $\alpha = \pi/2$ (при $\alpha = 0$ момент равен нулю).

Вращающий момент зависит как от свойств поля в данной точке, так и от свойства контура. Внося в одну и ту же точку поля разные пробные контуры, мы обнаружим, что при фиксированном α вращающий момент пропорционален силе тока I в контуре и площади S контура и совершенно не зависит от формы контура. Таким образом, действие магнитного поля на плоский контур с током определяется величиной

$$p_{\mathrm{m}} = IS, \tag{6.17}$$

которую называют дипольным магнитным моментом контура (аналогично вращающий момент, действующий в электрическом поле на диполь, пропорционален электрическому моменту диполя $p = ql$).

Кроме силы тока I и площади S, контур характеризуется также ориентацией в пространстве. Поэтому магнитный момент следует рассматривать как вектор, направление которого совпадает с направлением положительной нормали $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{p}_{\mathrm{m}} = IS\mathbf{n} \tag{6.18}$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор). Единицей магнитного момента является ампер-квадратный метр (А $\cdot$м^2).

На пробные контуры, различающиеся значением p_{m}, действуют в данной точке разные по модулю вращающие моменты M. Однако отношение M/p_{m} оказывается при фиксированном α одним и тем же. Поэтому в качестве модуля магнитной индукции можно принять величину, равную отношению $M_{\mathrm{max}}/p_{\mathrm{m}}$:

$$B = \frac{M_{\mathrm{max}}}{p_{\mathrm{m}}} \tag{6.19}$$

(M_{max} — наибольшее значение вращающего момента, получающееся при $\alpha = \pi/2$).

Итак, магнитная индукция есть векторная величина, модуль которой определяется выражением (6.19), а направление задается равновесным положением положительной нормали к контуру с током.

Единица измерения величины B, называемая *тесла* (Тл)[3], равна магнитной индукции однородного поля, в котором на плоский контур с током, имеющий магнитный момент 1 А $\cdot$м^2, действует максимальный вращающий момент, равный 1 Н $\cdot$ м.

6.3. Закон Био–Савара–Лапласа

Био[4] и Савар[5] провели в 1820 г. исследование магнитных полей, создаваемых токами, текущими по тонким проводам различной формы. Лаплас проанализировал экспериментальные данные, полученные Био и Саваром, и установил зависимость, которая получила название *закона Био–Савара–Лапласа*. Согласно этому закону магнитное поле любого тока может быть вычислено как векторная сумма (суперпозиция) полей, создаваемых отдельными элементарными участками тока. Для магнитной индукции поля, создаваемого элементом тока длины dl, Лаплас получил формулу

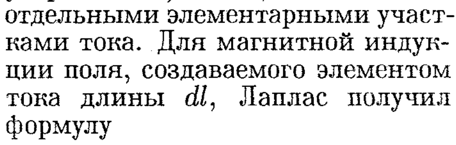


Рис. 6.2

$$d\mathbf{B} = k'\frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (6.20)$$

Здесь k' — коэффициент пропорциональности, $d\mathbf{l}$ — вектор, совпадающий с элементарным участком тока и направленный в ту сторону, в какую течет ток (рис. 6.2), $\mathbf{r}$ — вектор, проведенный от элемента тока в ту точку, в которой определяется $d\mathbf{B}$, r — модуль этого вектора.

Коэффициент пропорциональности k' в формуле (6.20) в СИ равен $\mu_0/4\pi$, где μ_0 — магнитная постоянная (см. (6.3)). Следовательно, в СИ формула (6.20) имеет вид

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (6.21)$$

---

[3]) В честь изобретателя в области электро- и радиотехники Николы Теслы (1856–1943) — по национальности серба, с 1884 г. — в США.

[4]) Жан Батист Био (1774–1862) — французский физик.

[5]) Феликс Савар (1791–1841) — французский физик.

В системах СГСЭ и СГСМ единица магнитной индукции B выбирается так, чтобы коэффициент k' в формуле (6.20) был равен единице. Следовательно, между единицами B в этих системах имеется то же соотношение, что и между единицами заряда:

$$1\,\text{СГСМ-ед.}\ B = 3\cdot 10^{10}\,\text{СГСЭ-ед.}\ B \qquad (6.22)$$

(см. (6.8)). СГСМ-единица магнитной индукции имеет специальное название — г а у с с (Гс).

К. Ф. Гаусс предложил систему единиц, в которой все электрические величины (заряд, сила тока, напряженность электрического поля и т. п.) измеряются в единицах СГСЭ-системы, а магнитные величины (магнитная индукция, магнитный момент и т. п.) — в единицах СГСМ-системы. Эта система единиц получила название г а у с с о в о й.

В гауссовой системе вследствие соотношений (6.9) и (6.10) во все формулы, содержащие наряду с магнитными величинами силу тока или заряд, входит по одному множителю $1/c$ на каждую стоящую в формуле величину I или q. Этот множитель превращает значение соответствующей величины (I или q), выраженное в единицах СГСЭ, в значение, выраженное в единицах СГСМ (система единиц СГСМ построена так, что коэффициенты пропорциональности во всех формулах равны единице). Например, формула (6.20) в гауссовой системе имеет вид

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{I[d\mathbf{l},\mathbf{r}]}{r^3}. \qquad (6.23)$$

Модуль выражения (6.21) определяется формулой

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\sin\alpha}{r^2}, \qquad (6.24)$$

где α — угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$..

Применим формулу (6.24) для вычисления поля прямого тока, т. е. поля, создаваемого током, текущим по тонкому прямому проводу бесконечной длины (рис. 6.3). Все векторы $d\mathbf{B}$ в данной точке имеют одинаковое направление (в нашем случае — за чертеж). Поэтому сложение векторов $d\mathbf{B}$ можно заменить сложением их модулей. Точка, для которой мы вычисляем магнитную индукцию, находится на расстоянии b от провода.

Из рис. 6.3 видно, что

$$r = \frac{b}{\sin\alpha}, \quad dl = \frac{r\,d\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b\,d\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Подставим эти значения в формулу (6.24):

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ib\,d\alpha\,\sin\alpha\sin^2\alpha}{b^2\sin^2\alpha} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}\sin\alpha\,d\alpha.$$

Угол α для всех элементов бесконечного прямого тока изменяется в пределах от нуля до π. Следовательно,

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}\int\limits_0^\pi \sin\alpha\,d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{b}.$$

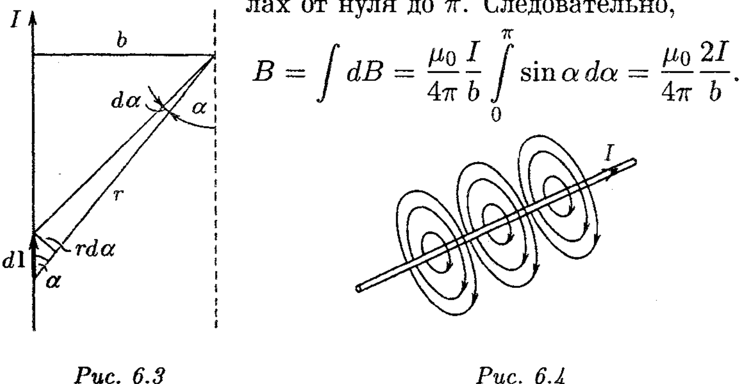


Рис. 6.3 Рис. 6.4

Таким образом, магнитная индукция поля прямого тока определяется формулой

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{b}. \tag{6.25}$$

Линии магнитной индукции поля прямого тока представляют собой систему охватывающих провод концентрических окружностей (рис. 6.4).

6.4. Поле движущегося заряда

Из формулы (6.21) легко получить выражение для магнитной индукции поля, создаваемого точечным зарядом q, движущимся со скоростью $\mathbf{v}$. Допустим, что ток создается

носителями с зарядом e' (знак безразличен), скорость упорядоченного движения которых равна **v**. Тогда

$$I = jS = ne'vS, \tag{6.26}$$

где S — площадь поперечного сечения проводника, n — число носителей тока в единице объема.

Подставим выражение (6.26) в формулу (6.21):

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ne'vS[d\mathbf{l},\mathbf{r}]}{r^3}. \tag{6.27}$$

Учтя, что векторы $e'\mathbf{v}$ и $d\mathbf{l}$ совпадают по направлению, заменим $e'vd\mathbf{l}$ на $e'\mathbf{v}dl$. Тогда формула (6.27) примет вид

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ne'Sdl[\mathbf{vr}]}{r^3} \tag{6.28}$$

(скалярные множители можно вносить и выносить из-под знака векторного произведения).

Произведение Sdl дает объем отрезка провода длины dl, поэтому $nSdl$ равно числу носителей тока, содержащихся в этом объеме и создающих поле $d\mathbf{B}$. Следовательно, разделив выражение (6.28) на $nSdl$, мы найдем магнитную индукцию **B** поля, создаваемого зарядом e', движущимся со скоростью **v**. Заменив e' на q, получим

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\mathbf{vr}]}{r^3}, \tag{6.29}$$

где **r** — вектор, проведенный от заряда в точку P поля, r — его модуль (рис. 6.5). Мы произвели замену e' на q в связи с тем, что формула (6.29) справедлива для любых точечных зарядов, например для заряженных шариков, размеры которых много меньше r.

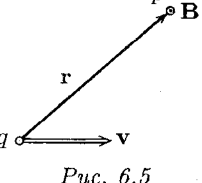


Рис. 6.5

Заметим, что в формуле (6.29) величины q и **v**, характеризующие заряд, стоят рядом. Это обстоятельство позволяет запомнить последовательность векторов **v** и **r** в векторном произведении. Пространство изотропно; поэтому, если заряд неподвижен, все направления оказываются равноправными. Этим обусловлен тот факт, что создаваемое точечным зарядом электростатическое поле является сферически-симметричным.

В случае движения заряда со скоростью $\mathbf{v}$ в пространстве появляется выделенное направление (направление вектора $\mathbf{v}$). Поэтому магнитное поле, создаваемое движущимся зарядом, обладает, как это следует из формулы (6.29), осевой симметрией. Отметим, что имеется в виду свободное движение заряда, т. е. движение с постоянной скоростью. Чтобы возникло ускорение, необходимо действие на заряд какого-то поля (электрического или магнитного). Это поле само по себе нарушило бы изотропию пространства.

К формуле (6.29) можно прийти путем следующих рассуждений. Рассмотрим магнитное поле, создаваемое в некоторой точке P точечным зарядом q, движущимся с постоянной скоростью $\mathbf{v}$ (см. рис. 6.5). Возмущения поля передаются от точки к точке с конечной скоростью c. Поэтому индукция $\mathbf{B}$ в точке P в момент t определяется не положением заряда в тот же момент t, а положением заряда в некоторый более ранний момент времени $t-\tau$:

$$\mathbf{B}(P,t) = f\left\{q,\mathbf{v},\mathbf{r}(t-\tau)\right\}.$$

Здесь P означает совокупность координат точки P, определяемых в некоторой неподвижной системе отсчета, $\mathbf{r}(t-\tau)$ — радиус-вектор, проведенный в точку P из той точки, в которой находился заряд в момент времени $t-\tau$. Если скорость движения заряда v много меньше c ($v \ll c$), время запаздывания τ будет пренебрежимо мало. В этом случае можно считать, что значение $\mathbf{B}$ в момент t определяется положением заряда в тот же момент времени t. При этом условии

$$\mathbf{B}(P,t) = f\left\{q,\mathbf{v},\mathbf{r}(t)\right\} \tag{6.30}$$

(напомним, что $\mathbf{v} = \mathrm{const}$; поэтому $\mathbf{v}(t-\tau) = \mathbf{v}(t)$).

Простейшее предположение заключается в том, что вектор $\mathbf{B}$ пропорционален заряду q и модулю скорости v (при $\mathbf{v} = 0$ магнитное поле отсутствует). Требуется «сконструировать» из скаляра q и двух заданных векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$ интересующий нас вектор $\mathbf{B}$. Это можно сделать, перемножив заданные векторы векторно и умножив затем получившийся результат на скаляр. В итоге получится выражение

$$q[\mathbf{vr}]. \tag{6.31}$$

С удалением от заряда (с увеличением r) модуль этого выражения возрастает. Неправдоподобно, чтобы так вела

себя характеристика поля, — в случае известных нам полей (электростатического, гравитационного) при удалении от источника поле не усиливается, но, напротив, ослабляется, изменяясь как $1/r^2$. Допустим, что магнитное поле движущегося заряда ведет себя с изменением r таким же образом. Обратную пропорциональность квадрату r можно получить, разделив выражение (6.31) на r^3. В результате получится выражение

$$\frac{q[\mathbf{vr}]}{r^3}, \tag{6.32}$$

которое с точностью до коэффициента пропорциональности совпадает с формулой (6.29).

Надо иметь в виду, что рассуждения, которые привели нас к выражению (6.32), не имеют доказательной силы. Их назначение заключается в том, чтобы помочь осмыслить и запомнить формулу (6.29). Сама же эта формула может быть получена только экспериментально.

Отметим, что появление при движении заряда выделенного направления в пространстве (направления вектора $\mathbf{v}$) приводит к тому, что и электрическое поле движущегося заряда утрачивает сферическую симметрию и становится осесимметричным. Из соответствующего расчета следует, что линии $\mathbf{E}$ поля свободно движущегося заряда имеют вид, показанный на рис. 6.6. Вектор $\mathbf{E}$ в точке P направлен вдоль радиуса-вектора $\mathbf{r}$, проведенного из точки, в которой находится заряд в данный момент, в точку P. Модуль же напряженности поля определяется формулой

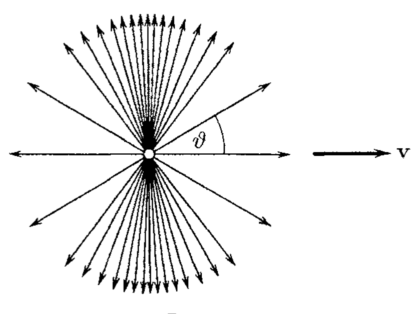


Рис. 6.6

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{1 - v^2/c^2}{[1 - (v^2/c^2)\sin^2\vartheta]^{3/2}}, \tag{6.33}$$

где ϑ — угол между направлением скорости $\mathbf{v}$ и радиусом-вектором $\mathbf{r}$.

При $v \ll c$ электрическое поле свободно движущегося заряда в каждый момент времени практически не отлича-

ется от электростатического поля, создаваемого неподвижным зарядом, находящимся в той точке, где в данный момент находится движущийся заряд. Однако нужно помнить, что это «электростатическое» поле перемещается вместе с зарядом, вследствие чего поле в каждой точке пространства изменяется со временем.

При v, сравнимых с c, поле в направлениях, перпендикулярных к $\mathbf{v}$, оказывается заметно сильнее, чем в направлении движения на таком же расстоянии от заряда (см. рис. 6.6, выполненный для $v/c = 0,8$). Поле «сплющивается» в направлении движения, сосредоточиваясь в основном вблизи проходящей через заряд плоскости, перпендикулярной к вектору $\mathbf{v}$.

6.5. Сила Лоренца

На заряд, движущийся в магнитном поле, действует сила, которую мы будем называть м а г н и т н о й. Эта сила определяется зарядом q, скоростью его движения v и магнитной индукцией $\mathbf{B}$ в той точке, где находится заряд в рассматриваемый момент времени. Простейшее предположение заключается в том, что модуль силы F пропорционален каждой из трех величин q, v и B. Кроме того, можно ожидать, что F зависит от взаимной ориентации векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$. Направление вектора $\mathbf{F}$ должно определяться направлениями векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$.

Для того чтобы «сконструировать» вектор $\mathbf{F}$ из скаляра q и векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$, перемножим $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ векторно и умножим затем получившийся результат на скаляр q. В итоге получим выражение

$$q[\mathbf{vB}]. \tag{6.34}$$

Опытным путем установлено, что сила $\mathbf{F}$, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле, определяется формулой

$$\mathbf{F} = kq[\mathbf{vB}], \tag{6.35}$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения фигурирующих в формуле величин.

Необходимо иметь в виду, что рассуждения, приведшие нас к выражению (6.34), нельзя рассматривать как вывод формулы (6.35). Эти рассуждения не носят доказательной силы. Их назначение состоит в том, чтобы об-

легчить запоминание формулы (6.35). Справедливость же этой формулы может быть установлена только экспериментально.

Отметим, что соотношение (6.35) можно рассматривать как определение магнитной индукции **B**.

Единица магнитной индукции B — тесла (Тл) — определяется так, чтобы коэффициент пропорциональности k в формуле (6.35) был равен единице. Следовательно, в СИ эта формула имеет вид

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{v}\mathbf{B}]. \tag{6.36}$$

Модуль магнитной силы равен

$$F = qvB\sin\alpha, \tag{6.37}$$

где α — угол между векторами **v** и **B**. Из (6.37) вытекает, что заряд, движущийся вдоль линий магнитного поля, не испытывает действия магнитной силы.

Направлена магнитная сила перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы **v** и **B**. Если заряд q положителен, направление силы совпадает с направлением вектора $[\mathbf{v}\mathbf{B}]$. В случае отрицательного q направления векторов **F** и $[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ противоположны (рис. 6.7). Поскольку магнитная сила всегда направлена перпендикулярно к скорости заряженной частицы, она работы над частицей не совершает. Следовательно, действуя на заряженную частицу постоянным магнитным полем, изменить ее энергию нельзя.

Рис. 6.7

Если имеются одновременно электрическое и магнитное поля, сила, действующая на заряженную частицу, равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{F} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}]. \tag{6.38}$$

Это выражение было получено X. Лоренцем путем обобщения экспериментальных данных и носит название силы Лоренца или лоренцевой силы.

Пусть заряд q движется со скоростью **v** параллельно прямому бесконечному проводу, по которому течет ток силы I (рис. 6.8). Согласно формулам (6.25) и (6.37) на заряд действует в этом случае магнитная сила, равная по модулю

$$F = qvB = qv\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{b}, \tag{6.39}$$

где b — расстояние от заряда до провода. В случае положительного заряда сила направлена к проводу, если направления тока и движения заряда одинаковы, и от провода, если направления тока и движения заряда противоположны (см. рис. 6.8). В случае отрицательного заряда направление силы изменяется на обратное.

Рассмотрим два одноименных точечных заряда q_1 и q_2, движущихся вдоль параллельных прямых с одинаковой

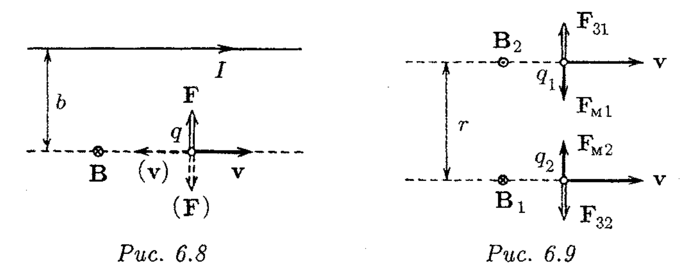


Рис. 6.8 Рис. 6.9

скоростью v, много меньшей c (рис. 6.9). При $v \ll c$ электрическое поле практически не отличается от поля неподвижных зарядов (см. § 6.4). Поэтому модуль электрической силы $F_э$, действующей на заряды, можно считать равным

$$F_{э1} = F_{э2} = F_э = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{6.40}$$

Согласно формулам (6.29) и (6.36) для магнитной силы $F_м$, действующей на заряды, получается выражение

$$F_{м1} = F_{м2} = F_м = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 q_2 v^2}{r^2} \tag{6.41}$$

(радиус-вектор $\mathbf{r}$ перпендикулярен к $\mathbf{v}$).

Найдем отношение магнитной силы к электрической. Из (6.40) и (6.41) следует, что

$$\frac{F_м}{F_э} = \varepsilon_0\mu_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2} \tag{6.42}$$

(см. (6.15)). Мы получили соотношение (6.42) в предположении, что $v \ll c$. Однако это соотношение оказывается справедливым при любых v.

Направления сил $\mathbf{F}_э$ и $\mathbf{F}_м$ противоположны. Рис. 6.9 выполнен для одноименных и притом положительных зарядов. Для одноименных отрицательных зарядов направления сил останутся теми же, а направления векторов $\mathbf{B}_1$

и $\mathbf{B}_2$ изменятся на противоположные. Для разноименных зарядов направления электрических и магнитных сил будут противоположны показанным на рисунке.

Из (6.42) следует, что магнитная сила слабее кулоновской на множитель, равный квадрату отношения скорости заряда к скорости света. Это объясняется тем, что магнитное взаимодействие между движущимися зарядами является релятивистским эффектом (см. § 6.7). Магнетизм исчез бы, если бы скорость света оказалась бесконечно большой.

6.6. Закон Ампера

Если провод, по которому течет ток, находится в магнитном поле, на каждый из носителей тока действует сила

$$\mathbf{F} = e[(\mathbf{v} + \mathbf{u}), \mathbf{B}] \tag{6.43}$$

(см. (6.39)). Здесь $\mathbf{v}$ — скорость хаотического движения носителя, $\mathbf{u}$ — скорость упорядоченного движения. От носителя тока действие этой силы передается проводнику, по которому он перемещается. В результате на провод с током, находящийся в магнитном поле, действует сила.

Найдем силу $d\mathbf{F}$, действующую на элемент провода длины dl. Усредним выражение (6.43) по носителям тока, содержащимся в элементе dl:

$$\langle \mathbf{F} \rangle = e[(\langle \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle), \mathbf{B}] = e[\langle \mathbf{u} \rangle, \mathbf{B}] \tag{6.44}$$

($\mathbf{B}$ — магнитная индукция в том месте, где помещается элемент dl). В элементе провода содержится число носителей, равное $nSdl$ (n — число носителей в единице объема, S — площадь поперечного сечения провода в данном месте). Умножив выражение (6.44) на число носителей, найдем интересующую нас силу:

$$d\mathbf{F} = \langle \mathbf{F} \rangle nSdl = [(ne\langle \mathbf{u} \rangle), \mathbf{B}]Sdl.$$

Приняв во внимание, что $ne\langle \mathbf{u} \rangle$ есть плотность тока $\mathbf{j}$, а Sdl дает объем элемента провода dV, можно написать

$$d\mathbf{F} = [\mathbf{j}\mathbf{B}]dV. \tag{6.45}$$

Отсюда можно получить выражение для плотности силы, т. е. для силы, действующей на единицу объема проводника:

$$\mathbf{F}_{\text{ед.об}} = [\mathbf{j}\mathbf{B}]. \tag{6.46}$$

Напишем формулу (6.45) в виде

$$d\mathbf{F} = [\mathbf{j}\mathbf{B}]S\,dl.$$

Заменив[6]) $\mathbf{j}S\,dl$ на $jS\,d\mathbf{l} = I\,d\mathbf{l}$, придем к формуле

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \qquad (6.47)$$

Эта формула определяет силу, действующую на элемент тока $d\mathbf{l}$ в магнитном поле. Соотношение (6.47) было установлено экспериментально Ампером и носит название **закона Ампера**.

Мы получили закон Ампера, исходя из выражения (6.36) для магнитной силы. В действительности выражение для магнитной силы было получено из установленного экспериментально соотношения (6.47).

Модуль силы (6.47) вычисляется по формуле

$$dF = IB\,dl \sin\alpha, \qquad (6.48)$$

где α — угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{B}$ (рис. 6.10). Направлена сила перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{B}$.

Применим закон Ампера для вычисления силы взаимодействия двух находящихся в вакууме параллельных

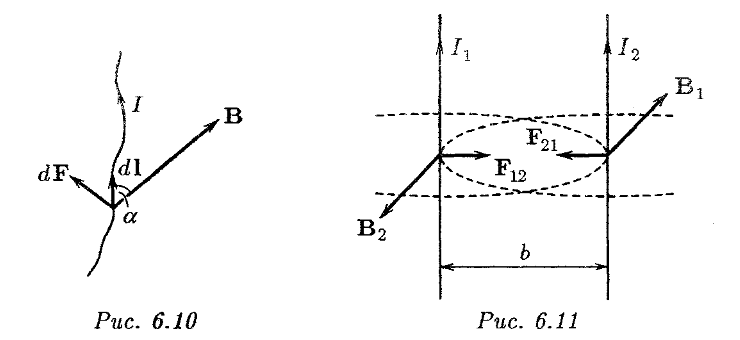


Рис. 6.10 *Рис. 6.11*

бесконечно длинных прямых токов. Если расстояние между токами b (рис. 6.11), то каждый элемент тока I_2 будет находиться в магнитном поле, индукция которого равна $B_1 = (\mu_0/4\pi)(2I_1/b)$ (см. формулу (6.25)). Угол α между элементами тока I_2 и вектором $\mathbf{B}_1$ прямой. Следовательно,

---

[6]) Замена возможна, поскольку направления векторов $\mathbf{j}$ и $d\mathbf{l}$ совпадают.

согласно (6.48) на единицу длины тока I_2 действует сила

$$F_{21\text{ед}} = I_2 B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 I_1 I_2}{b}. \tag{6.49}$$

Выражение (6.49) совпадает с формулой (6.2).

Для силы $F_{12\text{ед}}$, действующей на единицу длины тока I_1, получается аналогичное выражение. Легко убедиться в том, что при одинаковом направлении токов они притягивают друг друга, а при различном — отталкивают.

6.7. Магнитное взаимодействие как релятивистский эффект

Между электричеством и магнетизмом имеется глубокая связь. Основываясь на постулатах теории относительности и на инвариантности электрического заряда, можно показать, что магнитное взаимодействие зарядов и токов является следствием закона Кулона. Мы покажем это на

Рис. 6.12

Рис. 6.13

примере заряда, движущегося параллельно бесконечному прямому току со скоростью v_0 [7]) (рис. 6.12).

Согласно формуле (6.39) магнитная сила, действующая на заряд в рассматриваемом случае, равна

$$F = q v_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b} \tag{6.50}$$

(смысл буквенных обозначений ясен из рис. 6.12). Направлена сила к проводнику с током ($q > 0$).

Прежде чем приступить к выводу формулы (6.50), исходя из закона Кулона и релятивистских соотношений, рассмотрим следующий эффект. Пусть имеется бесконечная линейная цепочка точечных зарядов одинаковой величины e, отстоящих друг от друга на малый отрезок l_0

---

[7]) Чтобы сделать обозначения аналогичными обозначениям в гл. 7 кн. 1, мы обозначили скорость заряда через v_0.

(рис. 6.13). В силу малости l_0 можно говорить о линейной плотности зарядов λ_0, которая, очевидно, равна

$$\lambda_0 = e/l_0. \tag{6.51}$$

Приведем заряды в движение вдоль цепочки с одинаковой скоростью u. Тогда расстояние между зарядами сократится и станет равным

$$l = l_0\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

(см. формулу (6.19) кн. 1). Величина же зарядов вследствие их инвариантности останется прежней. В результате линейная плотность зарядов, наблюдаемая в системе отсчета, относительно которой заряды движутся, изменится и станет равной

$$\lambda = e/l = \lambda_0/\sqrt{1 - u^2/c^2}. \tag{6.52}$$

Теперь рассмотрим в системе отсчета K две практически совмещенные друг с другом бесконечные цепочки,

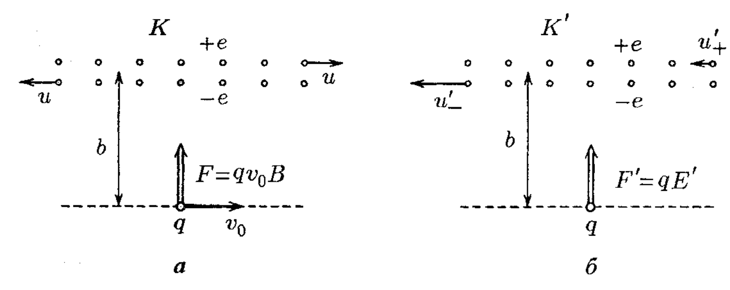


Рис. 6.14

образованные зарядами одинаковой величины, но разных знаков, движущимися в противоположные стороны с одинаковой скоростью u (рис. 6.14 *а*). Совокупность этих цепочек эквивалентна прямому бесконечному току силы

$$I = 2\lambda u = \frac{2\lambda_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \tag{6.53}$$

где λ — величина, определяемая формулой (6.52). Суммарная линейная плотность зарядов цепочки равна нулю, поэтому электрическое поле отсутствует. На заряд q действует магнитная сила, модуль которой согласно (6.50) и (6.53) равен

$$F = qv_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4\lambda_0 u}{b\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{6.54}$$

Перейдем в систему отсчета K', относительно которой заряд q покоится (рис. 6.14 *б*). В этой системе на заряд q также действует сила (обозначим ее F'). Однако эта сила не может быть магнитного происхождения, поскольку заряд q неподвижен. Сила F' имеет чисто электрическое происхождение. Возникает она потому, что линейные плотности положительных и отрицательных зарядов в цепочках теперь не одинаковы (ниже мы увидим, что плотность отрицательных зарядов больше). Избыточный отрицательный заряд, распределенный по цепочке, создает электрическое поле, которое действует на положительный заряд q с силой F', направленной к цепочке (см. рис. 6.14 *б*).

Вычислим силу F' и убедимся в том, что она «равна» силе F, определяемой формулой (6.54). Мы взяли слово «равна» в кавычки, потому что сила не является инвариантной величиной. При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой сила преобразуется по довольно сложному закону. В частном случае, когда сила $\mathbf{F}'$ перпендикулярна к относительной скорости систем K и K' ($\mathbf{F}'\perp\mathbf{v}_0$), преобразование имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}'\sqrt{1 - v_0^2/c^2} + \mathbf{v}_0(\mathbf{F}'\mathbf{v}')/c^2}{1 + \mathbf{v}_0\mathbf{v}'/c^2}$$

($\mathbf{v}'$ — измеренная в системе K' скорость частицы, на которую действует сила $\mathbf{F}'$). Если $\mathbf{v}' = 0$ (что имеет место в рассматриваемой нами задаче), формула преобразования силы выглядит следующим образом:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'\sqrt{1 - v_0^2/c^2}.$$

Из этой формулы вытекает, что перпендикулярная к $\mathbf{v}_0$ сила, действующая на покоящуюся в системе K' частицу, оказывается и в системе K перпендикулярной к вектору $\mathbf{v}_0$. Модуль же силы в этом случае преобразуется по формуле

$$F = F'\sqrt{1 - v_0^2/c^2}. \qquad (6.55)$$

Плотности зарядов в положительной и отрицательной цепочках, измеренные в системе K', имеют величины (см. (6.52))

$$\lambda'_+ = \lambda_0/\sqrt{1 - u_+'^2/c^2}, \quad \lambda'_- = -\lambda_0/\sqrt{1 - u_-'^2/c^2}, \qquad (6.56)$$

где u'_+ и u'_- — скорости зарядов $+e$ и $-e$, измеренные в системе K'. При переходе от системы K к системе K' проекция скорости частицы на направление x, совпадающее с направлением $\mathbf{v}_0$, преобразуется по формуле

$$u'_x = \frac{u_x - u_0}{1 - u_x v_0/c^2}$$

(см. формулу (6.36) кн. 1; мы заменили v и v' на u и u'). Для зарядов $+e$ компонента u_x равна u, для зарядов $-e$ она равна $-u$ (см. рис. 6.14 *а*). Следовательно,

$$(u'_x)_+ = \frac{u - v_0}{1 - uv_0/c^2}, \quad (u'_x)_- = \frac{-u - v_0}{1 + uv_0/c^2}.$$

Поскольку остальные проекции равны нулю, получаем

$$u'_+ = \frac{|u - v_0|}{1 - uv_0/c^2}, \quad u'_- = \frac{u + v_0}{1 + uv_0/c^2}. \tag{6.57}$$

Для упрощения выкладок перейдем к относительным скоростям

$$\beta_0 = v_0/c, \quad \beta = u/c, \quad \beta'_+ = u'_+/c, \quad \beta'_- = u'_-/c.$$

Тогда формулы (6.56) и (6.57) примут вид

$$\lambda'_+ = \lambda_0/\sqrt{1 - \beta'^2_+}, \quad \lambda'_- = -\lambda_0/\sqrt{1 - \beta'^2_-}, \tag{6.58}$$

$$\beta'_+ = \frac{|\beta - \beta_0|}{1 - \beta\beta_0}, \quad \beta'_- = \frac{\beta + \beta_0}{1 + \beta\beta_0}. \tag{6.59}$$

С учетом этих формул получаем для суммарной плотности зарядов выражение

$$\lambda' = \lambda'_+ + \lambda'_- = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - [(\beta - \beta_0)/(1 - \beta\beta_0)]^2}} - \\ - \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - [(\beta + \beta_0)/(1 + \beta\beta_0)]^2}} = \\ = \frac{\lambda_0(1 - \beta\beta_0)}{\sqrt{(1 - \beta\beta_0)^2 - (\beta - \beta_0)^2}} - \frac{\lambda_0(1 + \beta\beta_0)}{\sqrt{(1 + \beta\beta_0)^2 - (\beta + \beta_0)^2}}.$$

Легко убедиться в том, что

$$(1-\beta\beta_0)^2-(\beta-\beta_0)^2 = (1+\beta\beta_0)^2-(\beta+\beta_0)^2 = (1-\beta_0^2)(1-\beta^2).$$

Следовательно,

$$\lambda' = \frac{-2\lambda_0\beta\beta_0}{\sqrt{(1-\beta_0^2)(1-\beta^2)}} = \frac{-2\lambda_0 u v_0}{c^2\sqrt{1-v_0^2/c^2}\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{6.60}$$

В соответствии с формулой (1.124) бесконечно длинная нить, несущая заряд плотности λ', создает поле, напряженность которого на расстоянии b от нити равна

$$E' = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda'}{b}.$$

В этом поле на заряд q действует сила

$$F' = qE' = \frac{q\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 b}.$$

Подстановка выражения (6.60) дает (знак минус опускаем)

$$F' = \frac{q\lambda_0 u v_0}{\pi\varepsilon_0 b c^2\sqrt{1-v_0^2/c^2}\,\sqrt{1-u^2/c^2}} =$$

$$= \frac{q v_0 \mu_0}{4\pi}\frac{4\lambda_0 u}{b\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} \tag{6.61}$$

(напомним, что $\mu_0 = 1/\varepsilon_0 c^2$; см. (6.15)).

Полученное выражение отличается от выражения (6.54) лишь множителем $1/\sqrt{1-v_0^2/c^2}$. Следовательно, можно написать, что

$$F = F'\sqrt{1-v_0^2/c^2},$$

где F — сила, определяемая выражением (6.54), а F' — сила, определяемая выражением (6.61). Сравнение с (6.55) показывает, что F и F' суть значения одной и той же силы, определенные в системах K и K'.

Отметим, что в системе K'', которая двигалась бы относительно системы K со скоростью, отличной от скорости заряда v_0, сила, действующая на заряд, слагалась бы из электрической и магнитной сил.

Полученные нами результаты означают, что электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом и образуют единое электромагнитное поле. При специальном выборе системы отсчета поле может оказаться

чисто электрическим или чисто магнитным. Однако относительно других систем отсчета то же поле представляет собой совокупность электрического и магнитного полей.

В разных инерциальных системах отсчета электрическое и магнитное поля одной и той же совокупности зарядов оказываются различными. Вывод, выходящий за рамки курса общей физики, приводит к следующим формулам преобразования полей при переходе от системы отсчета K к движущейся относительно нее со скоростью v_0 системе отсчета K':

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, \quad E'_y = \frac{E_y - v_0 B_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E'_z = \frac{E_z + v_0 B_y}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ B'_x &= B_x, \quad B'_y = \frac{B_y + v_0 E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B'_z = \frac{B_z - v_0 E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \tag{6.62}$$

Здесь E_x, E_y, E_z и B_x, B_y, B_z — компоненты векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, характеризующих электромагнитное поле в системе K; аналогичные символы со штрихами — компоненты векторов $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$, характеризующих поле в системе K'; буквой β обозначено отношение v_0/c.

Разложив векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, а также $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$ на параллельные вектору $\mathbf{v}_0$ (а значит, и осям x и x') и перпендикулярные к этому вектору составляющие (т. е. представив, например, $\mathbf{E}$ в виде $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\|} + \mathbf{E}_{\perp}$ и т. д.), можно написать формулы (6.62) в векторном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\|} &= \mathbf{E}_{\|}, \qquad \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}]}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ \mathbf{B}'_{\|} &= \mathbf{B}_{\|}, \qquad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - (1/c^2)[\mathbf{v}_0 \mathbf{E}_{\perp}]}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \tag{6.63}$$

В гауссовой системе единиц формулы (6.63) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\|} &= \mathbf{E}_{\|}, \qquad \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + (1/c)[\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}]}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ \mathbf{B}'_{\|} &= \mathbf{B}_{\|}, \qquad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - (1/c)[\mathbf{v}_0 \mathbf{E}_{\perp}]}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \tag{6.64}$$

В случае, когда $\beta \ll 1$ (т. е. $v_0 \ll c$), формулы (6.63)

упрощаются следующим образом:

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \qquad \mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{v}_0\mathbf{B}_{\perp}];$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \qquad \mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_0\mathbf{E}_{\perp}].$$

Сложив попарно эти выражения, получим

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{v}_0\mathbf{B}_{\perp}] = \mathbf{E} + [\mathbf{v}_0\mathbf{B}_{\perp}];$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_0\mathbf{E}_{\perp}] = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_0\mathbf{E}_{\perp}]. \tag{6.65}$$

Поскольку векторы $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{B}_{\parallel}$ коллинеарны, их векторное произведение равно нулю. Поэтому $[\mathbf{v}_0\mathbf{B}] = [\mathbf{v}_0\mathbf{B}_{\parallel}]+$ $+[\mathbf{v}_0\mathbf{B}_{\perp}] = [\mathbf{v}_0\mathbf{B}_{\perp}]$. Аналогично $[\mathbf{v}_0\mathbf{E}] = [\mathbf{v}_0\mathbf{E}_{\perp}]$. С учетом этого формулам (6.65) можно придать вид

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{v}_0\mathbf{B}], \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}_0\mathbf{E}]. \tag{6.66}$$

По этим формулам преобразовываются поля в случае, если относительная скорость систем отсчета v_0 много меньше скорости света в вакууме $c\,(v_0 \ll c)$.

В гауссовой системе формулы (6.66) выглядят следующим образом:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_0\mathbf{B}], \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c}[\mathbf{v}_0\mathbf{E}]. \tag{6.67}$$

В рассмотренном в начале этого параграфа примере в системе K, в которой заряд q двигался параллельно проводу с током со скоростью $\mathbf{v}_0$, имелось только перпендикулярное к $\mathbf{v}_0$ магнитное поле $\mathbf{B}_{\perp}$; составляющие $\mathbf{B}_{\parallel}$, $\mathbf{E}_{\perp}$ и $\mathbf{E}_{\parallel}$ были равны нулю. Согласно формулам (6.63) в системе K', в которой заряд q покоится (эта система движется относительно K со скоростью $\mathbf{v}_0$), наблюдается составляющая $\mathbf{B}'_{\perp}$, равная $\mathbf{B}_{\perp}/\sqrt{1-\beta^2}$, и, кроме того, перпендикулярная составляющая электрического поля $\mathbf{E}'_{\perp} =$ $= [\mathbf{v}_0\mathbf{B}_{\perp}]/\sqrt{1-\beta^2}$.

В системе K на заряд действует сила

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{v}_0\mathbf{B}_{\perp}]. \tag{6.68}$$

Поскольку заряд q в системе K' покоится, на него в этой системе действует лишь электрическая сила

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'_{\perp} = \frac{q[\mathbf{v}_0\mathbf{B}_{\perp}]}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{6.69}$$

Сопоставление формул (6.68) и (6.69) дает $\mathbf{F} = \mathbf{F}'\sqrt{1-\beta^2}$, что совпадает с (6.55).

6.8. Контур с током в магнитном поле

Выясним, как ведет себя контур с током в магнитном поле. Начнем со случая, когда поле однородно ($\mathbf{B} = \text{const}$). Согласно (6.47) на элемент контура $d\mathbf{l}$ действует сила

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \tag{6.70}$$

Результирующая таких сил равна

$$\mathbf{F} = \oint I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \tag{6.71}$$

Вынеся постоянные величины I и $\mathbf{B}$ за знак интеграла, получим

$$\mathbf{F} = I[(\oint d\mathbf{l}), \mathbf{B}].$$

Интеграл $\oint d\mathbf{l}$ равен нулю, поэтому $\mathbf{F} = 0$. Таким образом, результирующая сила, действующая на контур с током в однородном магнитном поле, равна нулю. Это справедливо для контуров любой формы (в том числе и неплоских) при произвольном расположении контура относительно направления поля. Существенной для равенства нулю результирующей силы является лишь однородность поля.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением плоских контуров. Вычислим результирующий вращающий момент, создаваемый силами (6.70), приложенными к контуру. Поскольку в однородном поле сумма этих сил равна нулю, результирующий момент относительно любой точки будет один и тот же. Действительно, результирующий момент относительно некоторой точки O определяется выражением

$$\mathbf{N} = \int [\mathbf{r}, d\mathbf{F}],$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки O в точку приложения силы $d\mathbf{F}$. Возьмем точку O', смещенную относительно O на отрезок $\mathbf{b}$. Тогда $\mathbf{r} = \mathbf{b} + \mathbf{r}'$, соответственно

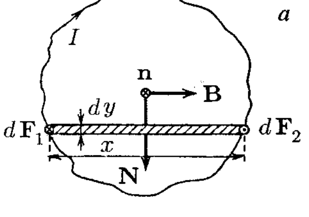
$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{b}$. Поэтому результирующий момент относительно точки O' равен

$$\mathbf{N}' = \int [\mathbf{r}', d\mathbf{F}] = \int [(\mathbf{r} - \mathbf{b}), d\mathbf{F}] =$$

$$= \int [\mathbf{r}, d\mathbf{F}] - \int [\mathbf{b}, d\mathbf{F}] = \mathbf{N} - [\mathbf{b}, \int d\mathbf{F}] = \mathbf{N}$$

($\int d\mathbf{F} = 0$). Моменты, вычисленные относительно двух произвольно взятых точек O и O', оказались совпадающими. Отсюда заключаем: момент не зависит от выбора точки, относительно которой он берется (ср. с парой сил).

Рассмотрим произвольный плоский контур с током, находящийся в однородном магнитном поле $\mathbf{B}$. Пусть контур ориентирован так, что положительная нормаль к контуру $\mathbf{n}$ перпендикулярна к вектору $\mathbf{B}$ (рис. 6.15). Положительной называется нормаль, направление которой связано с направлением тока в контуре правилом правого винта.



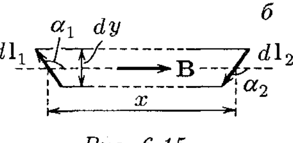


Рис. 6.15

Разобьем площадь контура на узкие параллельные направлению вектора $\mathbf{B}$ полоски ширины dy (см. рис. 6.15 *а*; на рис. 6.15 *б* одна такая полоска изображена в увеличенном виде). На ограничивающий полоску слева элемент контура $d\mathbf{l}_1$ действует сила $d\mathbf{F}_1$, направленная за чертеж. Модуль этой силы равен $dF_1 = IBdl_1 \sin\alpha_1 = IB\,dy$ (см. рис. 6.15 *б*). На ограничивающий полоску справа элемент контура $d\mathbf{l}_2$ действует сила $\mathbf{F}_2$, направленная на нас. Модуль этой силы равен $dF_2 = IBdl_2 \sin\alpha_2 = IB\,dy$.

Полученный нами результат означает, что силы, приложенные к противоположным элементам контура $d\mathbf{l}_1$ и $d\mathbf{l}_2$, образуют пару, момент которой равен

$$dN = IBxdy = IBdS$$

(dS — площадь полоски). Из рис. 6.15 видно, что вектор $d\mathbf{N}$ перпендикулярен к векторам $\mathbf{n}$ и $\mathbf{B}$ и, следовательно, может быть записан в виде

$$d\mathbf{N} = I[\mathbf{nB}]dS.$$

Просуммировав это выражение по всем полоскам, получим вращающий момент, действующий на контур:

$$\mathbf{N} = \int I[\mathbf{nB}]dS = I[\mathbf{nB}]\int dS = I[\mathbf{nB}]S \qquad (6.72)$$

(поле предполагается однородным, поэтому произведение $[\mathbf{nB}]$ для всех полосок одинаково и может быть вынесено за знак интеграла). Величина S в выражении (6.72) есть площадь контура.

Выражение (6.72) можно представить в виде

$$\mathbf{N} = [(IS\mathbf{n}), \mathbf{B}]. \qquad (6.73)$$

Эта формула сходна с формулой (1.57), определяющей вращающий момент, действующий на электрический диполь в электрическом поле. Аналогом $\mathbf{E}$ служит в (6.73) вектор $\mathbf{B}$, а аналогом дипольного электрического момента $\mathbf{p}$ — выражение $IS\mathbf{n}$. Это послужило основанием для того, чтобы назвать величину

$$\mathbf{p}_{\mathrm{m}} = IS\mathbf{n} \qquad (6.74)$$

дипольным магнитным моментом контура с током. Направление вектора $\mathbf{p}_{\mathrm{m}}$ совпадает с направлением положительной нормали к контуру.

Воспользовавшись обозначением (6.74), можно написать формулу (6.73) следующим образом:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p}_{\mathrm{m}}, \mathbf{B}] \quad (\mathbf{p}_{\mathrm{m}} \perp \mathbf{B}). \qquad (6.75)$$

Теперь допустим, что направление вектора $\mathbf{B}$ совпадает с направлением положительной нормали к контуру $\mathbf{n}$, а следовательно, и с направлением вектора $\mathbf{p}_{\mathrm{m}}$ (рис. 6.16). В этом случае силы, действующие на разные элементы контура, лежат в одной плоскости — плоскости контура. Сила, действующая на элемент контура $d\mathbf{l}$, определяется выражением (6.70). Вычислим результирующий момент таких сил относительно точки O, лежащей в плоскости контура:

$$\mathbf{N} = \int d\mathbf{N} = \int [\mathbf{r}, d\mathbf{F}] = I\oint [\mathbf{r}, [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]]$$

($\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки O к элементу $d\mathbf{l}$). Преобразуем подынтегральное выражение по формуле

«бац минус цаб» (см. формулу (1.35) кн. 1). В результате получим

$$\mathbf{N} = I[\oint(\mathbf{rB})d\mathbf{l} - \oint\mathbf{B}(\mathbf{r}, d\mathbf{l})].$$

Первый интеграл равен нулю вследствие того, что векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{B}$ взаимно перпендикулярны. Скалярное произведение под знаком второго интеграла равно $rdr = (1/2)d(r^2)$. Поэтому второй интеграл можно представить в виде

$$\frac{1}{2}\mathbf{B}\oint d(r^2).$$

Под знаком интеграла стоит полный дифференциал функции r^2. Сумма приращений функции на замкнутом пути равна нулю. Следовательно, и второе слагаемое в выражении для $\mathbf{N}$ равно нулю. Таким образом, мы доказали, что результирующий момент $\mathbf{N}$ относительно любой точки O, лежащей в плоскости контура, равен нулю. Такое же значение имеет результирующий момент относительно всех других точек (см. выше).

Итак, в случае, когда векторы $\mathbf{p}_m$ и $\mathbf{B}$ имеют одинаковое направление, магнитные силы, действующие на отдельные участки контура, не стремятся ни повернуть кон-

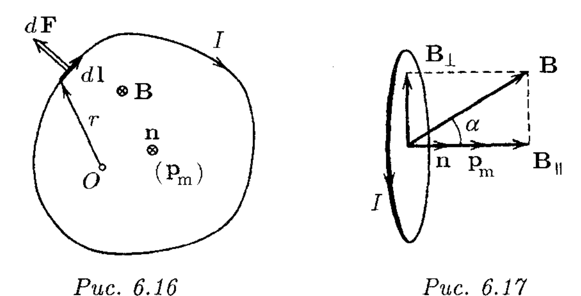


Рис. 6.16 Рис. 6.17

тур, ни сдвинуть его с места; они лишь стремятся растянуть контур в его плоскости. Если векторы $\mathbf{p}_m$ и $\mathbf{B}$ имеют противоположные направления, магнитные силы стремятся сжать контур.

Пусть направления векторов $\mathbf{p}_m$ и $\mathbf{B}$ образуют произвольный угол α (рис. 6.17). Разложим магнитную индукцию $\mathbf{B}$ на две составляющие: $\mathbf{B}_\parallel$ — параллельную и $\mathbf{B}_\perp$ — перпендикулярную вектору $\mathbf{p}_m$ и рассмотрим действие каждой составляющей отдельно. Составляющая $\mathbf{B}_\parallel$

будет обусловливать силы, растягивающие или сжимающие контур. Составляющая $\mathbf{B}_\perp$, модуль которой равен $B\sin\alpha$, приведет к возникновению вращающего момента, который можно вычислить по формуле (6.75):

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p}_\mathrm{m}, \mathbf{B}_\perp].$$

Из рис. 6.17 видно, что

$$[\mathbf{p}_\mathrm{m}, \mathbf{B}_\perp] = [\mathbf{p}_\mathrm{m}, \mathbf{B}].$$

Следовательно, в самом общем случае вращающий момент, действующий на плоский контур с током в однородном магнитном поле, определяется формулой

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p}_\mathrm{m}, \mathbf{B}]. \tag{6.76}$$

Модуль вектора $\mathbf{N}$ равен

$$N = p_\mathrm{m} B \sin\alpha. \tag{6.77}$$

Для того чтобы угол α между векторами $\mathbf{p}_\mathrm{m}$ и $\mathbf{B}$ увеличить на $d\alpha$, нужно совершить против сил, действующих на контур в магнитном поле, работу

$$dA = N d\alpha = p_\mathrm{m} B \sin\alpha\, d\alpha. \tag{6.78}$$

Поворачиваясь в первоначальное положение, контур может возвратить затраченную на его поворот работу, совершив ее над каким-нибудь телом. Следовательно, работа (6.78) идет на увеличение потенциальной энергии $W_{\text{п мех}}$, которой обладает контур с током в магнитном поле:

$$dW_{\text{п мех}} = p_\mathrm{m} B \sin\alpha\, d\alpha.$$

Интегрируя, находим

$$W_{\text{п мех}} = -p_\mathrm{m} B \cos\alpha + \text{const}.$$

Если положить $\text{const} = 0$, формула приобретает вид

$$W_{\text{п мех}} = -p_\mathrm{m} B \cos\alpha = -\mathbf{p}_\mathrm{m}\mathbf{B} \tag{6.79}$$

(ср. с формулой (1.60)).

Параллельная ориентация векторов $\mathbf{p}_\mathrm{m}$ и $\mathbf{B}$ отвечает минимуму энергии (6.79) и, следовательно, положению устойчивого равновесия контура.

Величина (6.79) представляет собой не полную потенциальную энергию контура с током, а лишь ту ее часть, которая обусловлена существованием вращающего момента (6.76). Чтобы подчеркнуть это, мы снабдили символ величины (6.79) индексом «мех». Полная потенциальная

энергия контура включает, кроме (6.79), еще другие слагаемые.

Теперь рассмотрим плоский контур с током в неоднородном магнитном поле. Для простоты будем вначале считать контур круговым. Предположим, что поле изменяется быстрее всего в направлении x, совпадающем с направлением $\mathbf{B}$ в том месте, где расположен центр контура, и что магнитный момент контура ориентирован по полю (рис. 6.18 *а*).

В рассматриваемом случае $\mathbf{B} \neq \text{const}$ и выражение (6.71) не обязано быть нулем. Сила $d\mathbf{F}$, действующая на элемент контура, перпендикулярна к $\mathbf{B}$, т. е. к линии магнитной индукции в месте пересечения ее с $d\mathbf{l}$. Поэтому силы, приложенные к различным элементам контура,

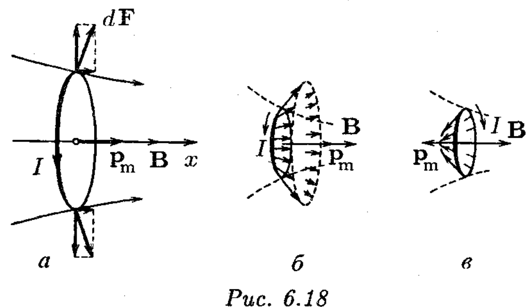


Рис. 6.18

образуют симметричный конический веер (рис. 6.18 *б*). Их результирующая $\mathbf{F}$ направлена в сторону возрастания $\mathbf{B}$ и, следовательно, втягивает контур в область более сильного поля. Очевидно, что чем сильнее изменяется поле (чем больше dB/dx), тем меньше угол раствора веера и тем больше, при прочих равных условиях, результирующая сила $\mathbf{F}$. Если изменить направление тока на обратное (при этом $\mathbf{p}_\text{m}$ станет противоположным $\mathbf{B}$), направления всех сил $d\mathbf{F}$ и их результирующей $\mathbf{F}$ изменятся на обратные (рис. 6.18 *в*). Следовательно, при такой взаимной ориентации векторов $\mathbf{p}_\text{m}$ и $\mathbf{B}$ контур будет выталкиваться из поля.

С помощью выражения (6.79) для энергии контура в магнитном поле легко найти количественное выражение для силы $\mathbf{F}$. Если ориентация магнитного момента по отношению к полю остается неизменной ($\alpha = \text{const}$), то $W_{\text{п мех}}$ будет зависеть только от x (через B). Продифференцировав $W_{\text{п мех}}$ по x и изменив у результата знак, по-

лучим проекцию силы на ось x:

$$F_x = -\frac{\partial W_{\text{п мех}}}{\partial x} = p_{\text{m}} \frac{\partial B}{\partial x} \cos\alpha.$$

По предположению, в других направлениях поле изменяется слабо, поэтому проекциями силы на другие оси можно пренебречь и считать, что $F = F_x$. Итак,

$$F = p_{\text{m}} \frac{\partial B}{\partial x} \cos\alpha. \tag{6.80}$$

Согласно полученной нами формуле сила, действующая на контур с током в неоднородном магнитном поле, зависит от ориентации магнитного момента контура относительно направления поля. Если векторы $\mathbf{p}_{\text{m}}$ и $\mathbf{B}$ совпадают по направлению ($\alpha = 0$), сила положительна, т. е. направлена в сторону возрастания $\mathbf{B}$ ($\partial B/\partial x$ предполагается положительным; в противном случае знак и направление силы изменятся на противоположные, но сила по-прежнему будет втягивать контур в область сильного поля). Если $\mathbf{p}_{\text{m}}$ и $\mathbf{B}$ антипараллельны ($\alpha = \pi$), сила отрицательна, т.е. направлена в сторону убывания $\mathbf{B}$. Этот результат мы уже получили качественно с помощью рис. 6.18.

Разумеется, что кроме силы (6.80), на контур с током в неоднородном магнитном поле будет действовать также вращающий момент (6.76).

6.9. Магнитное поле контура с током

Рассмотрим поле, создаваемое током, текущим по тонкому проводу, имеющему форму окружности радиуса R (круговой ток). Определим магнитную индукцию в центре кругового тока (рис. 6.19). Каждый элемент тока создает в центре индукцию, направленную вдоль положительной нормали к контуру. Поэтому векторное сложение $d\mathbf{B}$ сводится к сложению их модулей. По формуле (6.24) имеем

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{R^2}$$

($\alpha = \pi/2$). Проинтегрируем это выражение по всему контуру:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2(I\pi R^2)}{R^3}.$$

Выражение в скобках равно модулю дипольного магнитного момента p_{m} (см. (6.74)). Следовательно, магнитная индукция в центре кругового тока равна

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2p_{\text{m}}}{R^3}. \tag{6.81}$$

Из рис. 6.19 видно, что направление вектора **B** совпадает с направлением положительной нормали к контуру, т. е. с направлением вектора $\mathbf{p}_{\text{m}}$. Поэтому формулу (6.81) можно написать в векторном виде:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathbf{p}_{\text{m}}}{R^3}. \tag{6.82}$$

Теперь найдем **B** на оси кругового тока на расстоянии r от центра контура (рис. 6.20). Векторы $d\mathbf{B}$ перпендикулярны к плоскостям, проходящим через соответствующий элемент $d\mathbf{l}$ и точку, в которой мы ищем поле.

Следовательно, они образуют симметричный конический веер (рис. 6.20 *б*). Из соображений симметрии можно

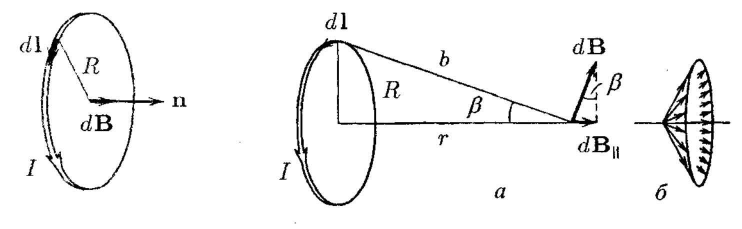


Рис. 6.19 *Рис. 6.20*

заключить, что результирующий вектор **B** направлен вдоль оси контура. Каждый из составляющих векторов $d\mathbf{B}$ вносит в результирующий вектор вклад $d\mathbf{B}_{||}$, равный по модулю $dB\sin\beta = dB(R/b)$. Угол α между $d\mathbf{l}$ и b прямой, поэтому

$$dB_{||} = dB\frac{R}{b} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{b^2}\frac{R}{b} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRdl}{b^3}.$$

Проинтегрировав по всему контуру и заменив b на $\sqrt{R^2+r^2}$, получим

$$B = \int dB_{||} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{b^3}\oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{b^3}\cdot 2\pi R =$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2(I\pi R^2)}{(R^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2p_{\text{m}}}{(R^2+r^2)^{3/2}}. \tag{6.83}$$

Эта формула определяет модуль магнитной индукции на оси кругового тока. Приняв во внимание, что векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{p}_{\mathrm{m}}$ имеют одинаковое направление, можно написать формулу (6.83) в векторном виде:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathbf{p}_{\mathrm{m}}}{(R^2 + r^2)^{3/2}}. \tag{6.84}$$

Это выражение не зависит от знака r. Следовательно, в точках оси, симметричных относительно центра тока, $\mathbf{B}$ имеет одинаковые модуль и направление.

При $r = 0$ формула (6.84) переходит, как и должно быть, в формулу (6.82) для магнитной индукции в центре кругового тока.

На больших расстояниях от контура в знаменателе можно пренебречь R^2 по сравнению с r^2. Тогда формула (6.84) принимает вид

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathbf{p}_{\mathrm{m}}}{r^3} \quad \text{(на оси тока)}, \tag{6.85}$$

аналогичный выражению (1.54) для напряженности электрического поля на оси диполя.

Расчет, выходящий за рамки данной книги, показывает, что любой системе токов или движущихся зарядов, локализованной в ограниченной части пространства, можно приписать магнитный дипольный момент $\mathbf{p}_{\mathrm{m}}$ (ср. с дипольным электрическим моментом системы зарядов). Магнитное поле такой системы на расстояниях, больших по сравнению с ее размерами, определяется через $\mathbf{p}_{\mathrm{m}}$ по таким же формулам, по каким определяется через дипольный электрический момент поле системы зарядов на больших расстояниях (см. § 1.10). В частности, поле плоского контура любой формы на больших расстояниях имеет вид

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p_{\mathrm{m}}}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta}. \tag{6.86}$$

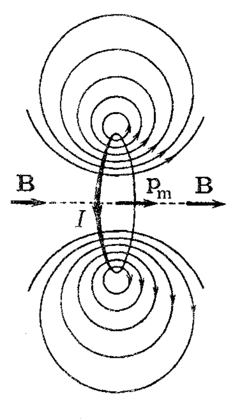


Рис. 6.21

где r — расстояние от контура до данной точки, ϑ — угол между направлением вектора $\mathbf{p}_{\mathrm{m}}$ и направлением от контура в данную точку поля (ср. с фор-

мулой (1.52)). При $\vartheta = 0$ формула (6.86) дает для модуля вектора **B** такое же значение, как и формула (6.85).

На рис. 6.21 изображены линии магнитной индукции поля кругового тока. Показаны лишь линии, лежащие в одной из плоскостей, проходящей через ось тока. Подобная же картина имеет место в любой из этих плоскостей.

Из всего сказанного в предыдущем и в данном параграфах вытекает, что дипольный магнитный момент является весьма важной характеристикой контура с током. Этой характеристикой определяется как поле, создаваемое контуром, так и поведение контура во внешнем магнитном поле.

6.10. Работа, совершаемая при перемещении тока в магнитном поле

Рассмотрим контур с током, образованный неподвижными проводами и скользящей по ним подвижной перемычкой длины l (рис. 6.22). Допустим, что этот контур находится во внешнем магнитном поле, которое мы будем

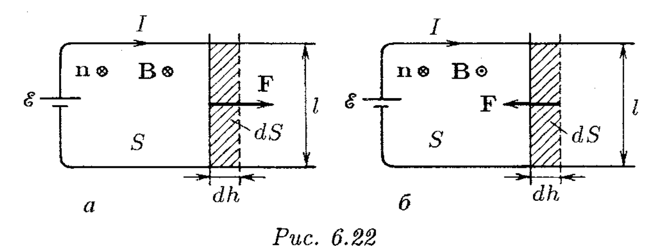


Рис. 6.22

предполагать однородным и перпендикулярным к плоскости контура. При указанных на рис. 6.22*а* направлениях тока и поля сила **F**, действующая на перемычку, будет направлена вправо и равна

$$F = IBl.$$

При перемещении перемычки вправо на dh эта сила совершит положительную работу

$$dA = F dh = IBl\, dh = IB\, dS, \qquad (6.87)$$

где dS — заштрихованная площадь (см. рис. 6.22*а*).

Выясним, как изменяется при перемещении перемычки поток магнитной индукции Φ через площадь контура. Условимся при вычислении потока через площадь контура с

током всегда брать в качестве **n** в выражении

$$\Phi = \int \mathbf{B}\mathbf{n}\,dS$$

положительную нормаль, т. е. нормаль, образующую с направлением тока в контуре правовинтовую систему (см. § 6.8). Тогда в случае, изображенном на рис. 6.22 *а*, поток будет положительным и равным BS (S — площадь контура). При перемещении перемычки вправо площадь контура получает положительное приращение dS. В результате поток также получает положительное приращение $d\Phi = BdS$. Поэтому выражение (6.87) можно представить в виде

$$dA = Id\Phi. \qquad (6.88)$$

При направлении поля на нас (рис. 6.22 *б*) сила, действующая на перемычку, направлена влево. Поэтому при перемещении перемычки вправо на dh магнитная сила совершает отрицательную работу

$$dA = -IBl\,dh = -IB\,dS. \qquad (6.89)$$

В этом случае поток через контур равен $-BS$. При увеличении площади контура на dS поток получает приращение $d\Phi$. Следовательно, выражение (6.89) также можно записать в виде (6.88).

Величину $d\Phi$ в выражении (6.88) можно трактовать как поток через площадь, описанную перемычкой при ее движении. Соответственно можно сказать, что работа, совершаемая магнитной силой над участком контура с током, равна произведению силы тока на магнитный поток

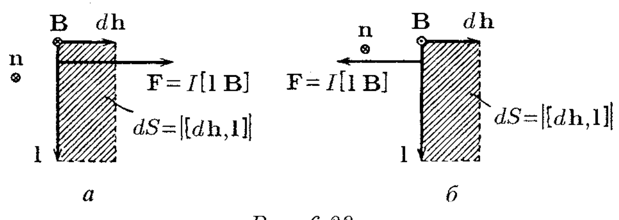


Рис. 6.23

через поверхность, описанную этим участком при своем движении.

Формулы (6.87) и (6.89) можно объединить в одно векторное выражение. Для этого сопоставим перемычке вектор **l**, имеющий направление тока (рис. 6.23). Независимо

от направления вектора **B** (от нас или на нас) силу, действующую на перемычку, можно представить в виде

$$\mathbf{F} = I[\mathbf{lB}].$$

При перемещении перемычки на $d\mathbf{h}$ сила совершает работу

$$dA = \mathbf{F}d\mathbf{h} = I[\mathbf{lB}]d\mathbf{h}.$$

Осуществим в смешанном произведении векторов циклическую перестановку сомножителей (см. формулу (1.34) кн. 1). В результате получим

$$dA = I\mathbf{B}[d\mathbf{h}, \mathbf{l}]. \qquad (6.90)$$

Из рис. 6.23 видно, что векторное произведение $[d\mathbf{h}, \mathbf{l}]$ численно равно площади dS, описанной перемычкой при ее движении, и имеет направление положительной нормали **n**. Следовательно,

$$dA = I\mathbf{Bn}\,dS. \qquad (6.91)$$

В случае, изображенном на рис. 6.23*а*, $\mathbf{Bn} = B$, и мы приходим к формуле (6.87). В случае, изображенном на рис. 6.23*б*, $\mathbf{Bn} = -B$, и мы приходим к формуле (6.89). Выражение $\mathbf{Bn}\,dS$ определяет приращение магнитного потока через контур, обусловленное перемещением перемычки.

Таким образом, формулу (6.91) можно записать в виде (6.88). Однако формула (6.91) имеет преимущество перед (6.88), поскольку из нее «автоматически» получается знак $d\Phi$, а следовательно, и знак dA.

Рассмотрим жесткий или деформируемый контур, который, находясь в магнитном поле, перемещается из некоторого исходного положения в бесконечно мало отличающееся от исходного конечное положение. Силу тока I в контуре будем считать при этом перемещении постоянной. Пусть элемент контура $d\mathbf{l}$ претерпевает произвольное перемещение, которое можно представить как смещение параллельно самому себе на отрезок $d\mathbf{h}$ и последующий поворот на угол $d\varphi$ (рис. 6.24). При этом элемент $d\mathbf{l}$ опишет площадь, равную

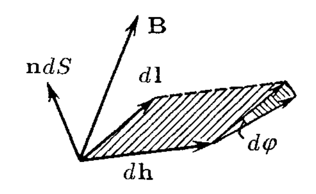


Рис. 6.24

$$|[d\mathbf{h}, d\mathbf{l}]| + \frac{1}{2}dl^2 d\varphi.$$

Второе слагаемое более высокого порядка малости, чем первое. Совершаемая над $d\mathbf{l}$ работа пропорциональна магнитному потоку через описанную $d\mathbf{l}$ поверхность (см. выше). Поэтому работа при повороте элемента $d\mathbf{l}$ будет более высокого порядка малости, чем работа при поступательном перемещении, и ею можно пренебречь.

Таким образом, при вычислении работы можно пренебречь поворотом элемента $d\mathbf{l}$ на угол $d\varphi$ и считать совершаемую магнитной силой над элементом контура работу равной

$$dA_{\text{эл}} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]d\mathbf{h}. \qquad (6.92)$$

Здесь $\mathbf{B}$ — магнитная индукция в том месте, где находится элемент контура $d\mathbf{l}$.

Осуществив в (6.92) циклическую перестановку сомножителей, получим

$$dA_{\text{эл}} = I\mathbf{B}[d\mathbf{h}, d\mathbf{l}]. \qquad (6.93)$$

Векторное произведение $[d\mathbf{h}, d\mathbf{l}]$ равно по модулю площади параллелограмма, построенного на векторах $d\mathbf{h}$ и $d\mathbf{l}$, т. е. площади dS, описываемой элементом $d\mathbf{l}$ при его перемещении. Направление векторного произведения совпадает с направлением положительной нормали к площадке dS. Следовательно,

$$\mathbf{B}[d\mathbf{h}, d\mathbf{l}] = \mathbf{B}\mathbf{n}\,dS = d\Phi_{\text{эл}}, \qquad (6.94)$$

где $d\Phi_{\text{эл}}$ — приращение магнитного потока через контур, обусловленное перемещением элемента контура $d\mathbf{l}$.

Приняв во внимание равенство (6.94), напишем (6.93) в виде

$$dA_{\text{эл}} = Id\Phi_{\text{эл}}. \qquad (6.95)$$

Просуммировав выражение (6.95) по всем элементам контура, получим выражение для работы магнитных сил при произвольном бесконечно малом перемещении контура:

$$dA = \int dA_{\text{эл}} = \int Id\Phi_{\text{эл}} = I\int d\Phi_{\text{эл}} = Id\Phi \qquad (6.96)$$

($d\Phi$ — полное приращение потока через контур).

Чтобы найти работу, совершаемую при конечном произвольном перемещении контура, просуммируем выражение (6.96) по всем элементарным перемещениям:

$$A_{12} = \int dA = I\int d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1). \qquad (6.97)$$

Здесь Φ_1 и Φ_2 — значения магнитного потока через контур в начальном и конечном положениях. Таким образом, работа, совершаемая магнитными силами над контуром, равна произведению силы тока на приращение магнитного потока через контур.

В частности, при повороте плоского контура в однородном поле из положения, в котором векторы $\mathbf{p}_\text{m}$ и $\mathbf{B}$ направлены в противоположные стороны (в этом положении $\Phi = -BS$), в положение, при котором эти векторы совпадают по направлению (в этом положении $\Phi = BS$), магнитные силы совершают над контуром работу

$$A = I\,[BS - (-BS)] = 2IBS.$$

Тот же результат получается с помощью выражения (6.79) для потенциальной энергии контура в магнитном поле:

$$A = W_\text{нач} - W_\text{кон} = p_\text{m}B - (-p_\text{m}B) - 2p_\text{m}B = 2ISB$$

$(p_\text{m} = IS)$.

Отметим, что работа (6.97) совершается не за счет энергии внешнего магнитного поля, а за счет источника, поддерживающего неизменным ток в контуре. В § 8.2 будет показано, что при изменениях магнитного потока, пронизывающего контур, в этом контуре возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = -(d\Phi/dt)$. Следовательно, источник, кроме работы, затрачиваемой на выделение ленц-джоулева тепла, должен совершать дополнительную работу против ЭДС индукции, определяемую выражением

$$A = \int dA = -\int \mathcal{E}_i I\,dt = \int \frac{d\Phi}{dt} I\,dt = \int I\,d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

которое совпадает с (6.97).

6.11. Дивергенция и ротор магнитного поля

Отсутствие в природе магнитных зарядов[8]) приводит к тому, что линии вектора **B** не имеют ни начала, ни конца. Поэтому в соответствии с формулой (1.76) поток век-

---

[8]) Английский физик-теоретик Поль Адриен Морис Дирак (1902–1984) высказал предположение, что в природе должны существовать магнитные заряды (названные монополями Дирака). Поиски этих зарядов пока не дали никаких результатов, так что вопрос о существовании монополей Дирака остается открытым.

тора **B** через замкнутую поверхность должен быть равен нулю. Таким образом, для любого магнитного поля и произвольной замкнутой поверхности S имеет место условие

$$\Phi_B = \oint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0. \tag{6.98}$$

Эта формула выражает теорему Гаусса для вектора **B**: поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Заменив в соответствии с (1.110) поверхностный интеграл в (6.98) объемным, получим, что

$$\int_V \nabla\mathbf{B}\, dV = 0.$$

Условие, к которому мы пришли, должно выполняться для любого произвольно выбранного объема V. Это возможно лишь в том случае, если подынтегральная функция в каждой точке поля равна нулю. Таким образом, магнитное поле обладает тем свойством, что его дивергенция всюду равна нулю:

$$\nabla\mathbf{B} = 0. \tag{6.99}$$

Теперь обратимся к циркуляции вектора **B**. По определению циркуляция равна интегралу

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l}. \tag{6.100}$$

Проще всего вычислить этот интеграл в случае поля прямого тока. Пусть замкнутый контур лежит в плоскости, перпендикулярной к току (рис. 6.25; ток перпендикулярен к плоскости чертежа и направлен за чертеж). В каждой

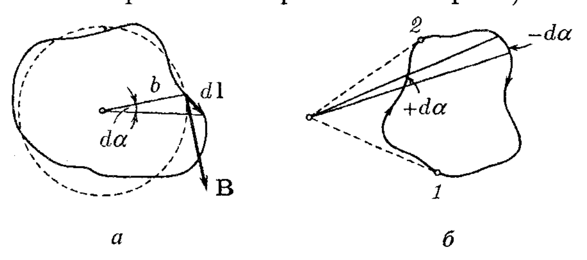


Рис. 6.25

точке контура вектор **B** направлен по касательной к окружности, проходящей через эту точку. Заменим в выраже-

нии для циркуляции $\mathbf{B}d\mathbf{l}$ на $B\,dl_B$ (dl_B — проекция элемента контура на направление вектора $\mathbf{B}$). Из рисунка видно, что dl_B равно $b\,d\alpha$, где b — расстояние от провода с током до $d\mathbf{l}$, $d\alpha$ — угол, на который поворачивается радиальная прямая при перемещении вдоль контура на отрезок $d\mathbf{l}$. Таким образом, подставив выражение (6.25) для B, получим

$$\mathbf{B}\,d\mathbf{l} = B\,dl_B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{b}b\,d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,d\alpha. \qquad (6.101)$$

С учетом равенства (6.101) имеем

$$\oint \mathbf{B}\,d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint d\alpha. \qquad (6.102)$$

При обходе по контуру, охватывающему ток, радиальная прямая все время поворачивается в одном направлении, поэтому $\oint d\alpha = 2\pi$. Иначе обстоит дело, если ток не охватывается контуром (рис. 6.25 *б*). В этом случае при обходе по контуру радиальная прямая поворачивается сначала в одном направлении (участок *1–2*), а затем в противоположном (участок *2–1*), вследствие чего $\oint d\alpha$ равен нулю. Учтя этот результат, можно написать

$$\oint \mathbf{B}d\mathbf{l} = \mu_0 I, \qquad (6.103)$$

где под I следует подразумевать ток, охватываемый контуром. Если контур тока не охватывает, циркуляция вектора $\mathbf{B}$ равна нулю.

Знак выражения (6.103) зависит от направления обхода по контуру (в этом же направлении отсчитывается угол α). Если направление обхода образует с направлением тока правовинтовую систему, величина (6.103) положительна, в противном случае — отрицательна. Знак можно учесть, полагая I алгебраической величиной, причем положительным нужно считать ток, направление которого связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта; ток противоположного направления будет отрицательным.

С помощью соотношения (6.103) легко восстановить в памяти формулу (6.25) для B поля прямого тока. Представим себе плоский контур в виде окружности радиуса b (рис. 6.26). В каждой точке этого контура вектор $\mathbf{B}$ одинаков по модулю и направлен по касательной к окружности. Следовательно, циркуляция равна произведению B

на длину окружности $2\pi b$, и соотношение (6.103) имеет вид
$$B \cdot 2\pi b = \mu_0 I.$$
Отсюда $B = \mu_0 I/2\pi b$ (ср. с (6.25)).

Случай неплоского контура (рис. 6.27) отличается от рассмотренного выше случая плоского контура лишь тем, что при перемещении вдоль контура радиальная прямая не только поворачивается вокруг провода, но и перемещается вдоль него. Все выкладки, приведшие нас к формуле (6.103), остаются справедливыми, если под $d\alpha$ подразумевать угол, на который поворачивается проекция радиальной прямой на перпендикулярную к току плоскость. Суммарный угол поворота этой проекции равен 2π, если контур охватывает ток, и нулю в противном случае. Следовательно, мы снова приходим к формуле (6.103).

Рис. 6.26

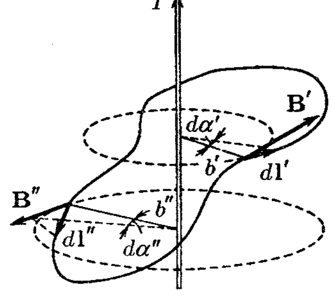


Рис. 6.27

Формула (6.103) получена нами для случая прямого тока. Можно показать, что она справедлива и для тока, текущего по проводу произвольной формы, например для кругового тока. Допустим, что некоторый контур охватывает несколько проводов с токами. В силу принципа суперпозиции (см. (6.16))
$$\oint \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \oint \Big(\sum_k \mathbf{B}_k\Big)\, d\mathbf{l} = \sum_k \oint \mathbf{B}_k\, d\mathbf{l}.$$
Каждый из интегралов в этой сумме равен $\mu_0 I_k$. Следовательно,
$$\oint \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_k I_k \qquad (6.104)$$
(напомним, что I_k — алгебраическая величина).

Если токи текут во всем пространстве, где расположен контур, алгебраическую сумму токов, охватываемых кон-

туром, можно представить в виде

$$\sum_k I_k = \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{jn}\, dS. \qquad (6.105)$$

Интеграл берется по произвольной поверхности S, натянутой на контур. Вектор $\mathbf{j}$ есть плотность тока в той точке, где расположена площадка dS; $\mathbf{n}$ — положительная нормаль к этой площадке (т. е. нормаль, образующая с направлением обхода по контуру при вычислении циркуляции правовинтовую систему). Заменив в (6.104) сумму токов выражением (6.105), получим $\oint \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S}$. Преобразовав левую часть по теореме Стокса, придем к равенству

$$\int_S [\nabla \mathbf{B}]\, d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S}.$$

Полученное равенство должно выполняться при произвольном выборе поверхности S, по которой берутся интегралы. Это возможно лишь в том случае, если подынтегральные функции имеют в каждой точке одинаковые значения. Таким образом, мы приходим к выводу, что ротор вектора магнитной индукции пропорционален вектору плотности тока в данной точке:

$$[\nabla \mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{j}. \qquad (6.106)$$

Коэффициент пропорциональности в СИ равен μ_0.

Отметим, что формулы (6.104) и (6.106) справедливы только для поля в вакууме в отсутствие меняющихся во времени электрических полей.

Итак, мы нашли дивергенцию и ротор магнитного поля в вакууме. Сравним полученные формулы с аналогичными формулами для электростатического поля в вакууме. Согласно (1.119), (1.114), (6.99) и (6.106)

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad\qquad [\nabla \mathbf{E}] = 0$$

(дивергенция **E** равна ρ, деленному на ε_0) (ротор **E** равен нулю)

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \qquad\qquad [\nabla \mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{j}$$

(дивергенция **B** равна 0) (ротор **B** равен **j**, умноженному на μ_0).

Сопоставление этих формул показывает, что электростатическое и магнитное поля имеют существенно различный характер. Ротор электростатического поля равен нулю; следовательно, электростатическое поле потенциально и может быть охарактеризовано скалярным потенциалом φ. Ротор магнитного поля в тех точках, где есть ток, отличен от нуля. Соответственно циркуляция вектора **B** пропорциональна току, охватываемому контуром. Поэтому магнитному полю нельзя приписать скалярный потенциал, который был бы связан с **B** соотношением, аналогичным (1.40). Этот потенциал не был бы однозначным — при каждом обходе по контуру и возвращении в исходную точку он получал бы приращение, равное $\mu_0 I$. Поле, у которого ротор отличен от нуля, называется *вихревым* или *соленоидальным*.

Поскольку дивергенция вектора **B** всюду равна нулю, этот вектор можно представить в виде ротора некоторой функции **A**:

$$\mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}] \tag{6.107}$$

(дивергенция ротора всегда равна нулю; см. (1.108)). Функция **A** называется *векторным потенциалом* магнитного поля. Некоторые сведения о векторном потенциале содержатся в Приложении (с. 327).

6.12. Поле соленоида и тороида

Соленоид представляет собой провод, навитый на круглый цилиндрический каркас. Линии **B** поля соленоида выглядят примерно так, как показано на рис. 6.28. Внутри соленоида направление этих линий образует с направлением тока в витках правовинтовую систему.

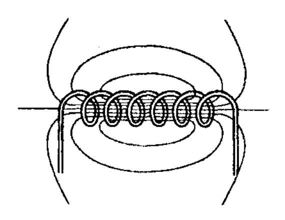
У реального соленоида имеется составляющая тока вдоль оси. Кроме того, линейная плотность тока $j_{\text{лин}}$ (равная отношению силы тока dI к элементу длины соленоида dl) изменяется периодически при перемещении вдоль соленоида. Среднее значение этой плотности равно

$$\langle j_{\text{лин}} \rangle = \left\langle \frac{dI}{dl} \right\rangle = nI. \tag{6.108}$$

где n — число витков соленоида, приходящееся на единицу его длины, I — сила тока в соленоиде.

В учении об электромагнетизме большую роль играет воображаемый бесконечно длинный соленоид, у которого

отсутствует осевая составляющая тока и, кроме того, линейная плотность тока $j_{лин}$ постоянна по всей длине. Причина этого заключается в том, что поле такого соленоида однородно и ограничено объемом соленоида (аналогично электрическое поле бесконечного плоского конденсатора однородно и ограничено объемом конденсатора).



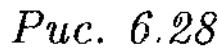


Рис. 6.28

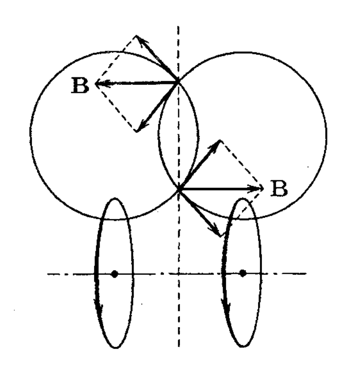


Рис. 6.29

В соответствии со сказанным представим соленоид в виде бесконечного тонкостенного цилиндра, обтекаемого током постоянной линейной плотности

$$j_{лин} = nI. \tag{6.109}$$

Разобьем цилиндр на одинаковые круговые токи — «витки». Из рис. 6.29 видно, что каждая пара витков, расположенных симметрично относительно некоторой плоскости, перпендикулярной к оси соленоида, создает в любой точке этой плоскости магнитную индукцию, параллельную оси. Следовательно, и результирующее поле в любой точке внутри и вне бесконечного соленоида может иметь лишь направление, параллельное оси.

Из рис. 6.28 вытекает, что направления поля внутри и вне конечного соленоида противоположны. При увеличении длины соленоида направления полей не изменяются и в пределе при $l \to \infty$ остаются противоположными. Для бесконечного соленоида, как и для конечного, направление поля внутри соленоида образует с направлением обтекания цилиндра током правовинтовую систему.

Из параллельности вектора **B** оси вытекает, что поле как внутри, так и вне бесконечного соленоида должно быть однородным. Чтобы доказать это, возьмем внутри соленоида воображаемый прямоугольный контур *1–2–3–4* (рис. 6.30; участок *4–1* идет по оси соленоида). Обойдя

контур по часовой стрелке, получим для циркуляции вектора **B** значение $(B_2 - B_1)a$. Контур не охватывает токов, поэтому циркуляция должна быть равна нулю (см. (6.104)). Отсюда следует, что $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$. Располагая участок контура *2–3* на любом расстоянии от оси, мы каждый раз будем получать, что магнитная индукция $\mathbf{B}_2$ на этом расстоянии равна индукции $\mathbf{B}_1$ на оси соленоида. Таким образом, однородность поля внутри соленоида доказана.



Рис. 6.30

Рис. 6.31

Теперь обратимся к контуру *1′–2′–3′–4′*. Мы изобразили векторы $\mathbf{B}'_1$ и $\mathbf{B}'_2$ штриховой линией, поскольку, как выяснится в дальнейшем, поле вне бесконечного соленоида равно нулю. Пока же мы знаем лишь, что возможное направление поля вне соленоида противоположно направлению поля внутри соленоида. Контур *1′–2′–3′–4′* не охватывает токов; поэтому циркуляция вектора $\mathbf{B}'$ по этому контуру, равная $(B'_1 - B'_2)a$, должна быть равна нулю. Отсюда вытекает, что $\mathbf{B}'_1 = \mathbf{B}'_2$. Расстояния от оси соленоида до участков *1′–4′* и *2′–3′* были взяты произвольно. Следовательно, значение $\mathbf{B}'$ на любом расстоянии от оси будет вне соленоида одно и то же. Таким образом, оказывается доказанной и однородность поля вне соленоида.

Циркуляция по контуру, изображенному на рис. 6.31, равна $a(B+B')$ (для обхода по часовой стрелке). Этот контур охватывает положительный ток $j_{\text{лин}}a$. В соответствии с (6.104) должно выполняться равенство

$$a(B + B') = \mu_0\, j_{\text{лин}}\, a$$

или после сокращения на a и замены $j_{\text{лин}}$ на nI (см. (6.109))

$$B + B' = \mu_0 n I. \qquad (6.110)$$

Из этого равенства следует, что поле как внутри, так и снаружи бесконечного соленоида является конечным.

Возьмем плоскость, перпендикулярную к оси соленоида (рис. 6.32). Вследствие замкнутости линий **B** магнитные потоки через внутреннюю часть S этой плоскости и через внешнюю часть S' должны быть одинаковыми. Поскольку поля однородны и перпендикулярны к плоскости, каждый из потоков равен произведению соответствующей магнитной индукции и площади, пронизываемой потоком. Таким образом, получается соотношение

$$BS = B'S'.$$

Левая часть этого равенства конечна, множитель S' в правой части бесконечно большой. Следовательно, $B' = 0$.

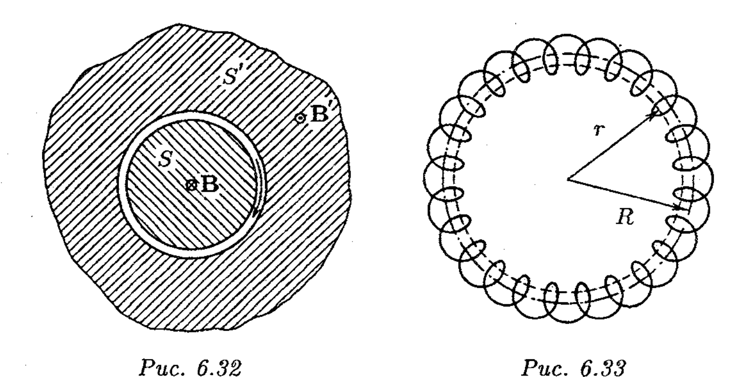


Рис. 6.32 *Рис. 6.33*

Итак, мы доказали, что вне бесконечно длинного соленоида магнитная индукция равна нулю. Внутри соленоида поле однородно. Положив в (6.110) $B' = 0$, придем к формуле для магнитной индукции внутри соленоида:

$$B = \mu_0 nI. \qquad (6.111)$$

Произведение nI называется числом ампер-витков на метр. При $n = 1000$ витков на метр и силе тока 1 А магнитная индукция внутри соленоида составляет $4\pi \cdot 10^{-4}$ Тл$=$ $= 4\pi$ Гс.

В магнитную индукцию на оси соленоида симметрично расположенные витки вносят одинаковый вклад (см.(6.84)). Поэтому у конца полубесконечного соленоида на его оси магнитная индукция равна половине значения (6.111):

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 nI. \qquad (6.112)$$

Практически, если длина соленоида значительно больше, чем его диаметр, формула (6.111) будет справедлива для точек в средней части соленоида, а формула (6.112) — для точек на оси вблизи его концов.

Тороид представляет собой провод, навитый на каркас, имеющий форму тора (рис. 6.33). Возьмем контур в виде окружности радиуса r, центр которой совпадает с центром тороида. В силу симметрии вектор **B** в каждой точке должен быть направлен по касательной к контуру. Следовательно, циркуляция **B** равна

$$\oint \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r$$

(**B** — магнитная индукция в тех точках, где проходит контур). Если контур проходит внутри тороида, он охватывает ток $2\pi RnI$ (R — радиус тороида, n — число витков на единицу его длины). В этом случае

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot 2\pi RnI,$$

откуда

$$B = \mu_0 nI \frac{R}{r}. \qquad (6.113)$$

Контур, проходящий вне тороида, токов не охватывает, поэтому для него $B \cdot 2\pi r = 0$. Таким образом, вне тороида магнитная индукция равна нулю.

Для тороида, радиус которого R значительно превосходит радиус витка, отношение R/r для всех точек внутри тороида мало отличается от единицы и вместо (6.113) получается формула, совпадающая с формулой (6.111) для бесконечно длинного соленоида. В этом случае поле можно считать однородным в каждом из сечений тороида. В разных сечениях поле имеет различное направление, поэтому говорить об однородности поля в пределах всего тороида можно только условно, имея в виду одинаковость модуля **B**.

У реального тороида имеется составляющая тока вдоль оси. Эта составляющая создает в дополнение к полю (6.113) поле, аналогичное полю кругового тока.

Глава 7

Магнитное поле в веществе

7.1. Намагничение магнетика

В предыдущей главе предполагалось, что провода, по которым текут токи, создающие магнитное поле, находятся в вакууме. Если несущие ток провода находятся в какой-либо среде, магнитное поле изменяется. Это объясняется тем, что всякое вещество является **магнетиком**, т. е. способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться). Намагниченное вещество создает магнитное поле $\mathbf{B}'$, которое накладывается на обусловленное токами поле $\mathbf{B}_0$. Оба поля в сумме дают результирующее поле

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' \tag{7.1}$$

(ср. с (2.8)). Истинное (микроскопическое) поле в магнетике сильно изменяется в пределах межмолекулярных расстояний. Под $\mathbf{B}$ подразумевается усредненное (макроскопическое) поле (см. § 2.3).

Для объяснения намагничения тел Ампер предположил, что в молекулах вещества циркулируют круговые токи (молекулярные токи). Каждый такой ток обладает магнитным моментом и создает в окружающем пространстве магнитное поле. В отсутствие внешнего поля молекулярные токи ориентированы беспорядочным образом, вследствие чего обусловленное ими результирующее поле равно нулю.

В силу хаотической ориентации магнитных моментов отдельных молекул суммарный магнитный момент тела также равен нулю. Под действием поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию в одном направлении, вследствие чего магнетик намагничивается — его суммарный магнитный момент становится отличным от нуля. Магнитные поля отдельных молекулярных токов в этом случае уже не компенсируют друг друга и возникает поле $\mathbf{B}'$.

Намагничение магнетика естественно характеризовать магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют намагниченностью и обозначают буквой $\mathbf{J}$. Если магнетик намагничен неоднородно, намагниченность в данной точке определяется следующим выражением:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V}\mathbf{p}_m, \qquad (7.2)$$

где ΔV — физически бесконечно малый объем, взятый в окрестности рассматриваемой точки, $\mathbf{p}_m$ — магнитный момент отдельной молекулы. Суммирование производится по всем молекулам, заключенным в объеме ΔV (ср. с формулой (2.4)).

Поле $\mathbf{B}'$, так же как и поле $\mathbf{B}_0$, не имеет источников. Поэтому дивергенция результирующего поля (7.1) равна нулю:

$$\nabla\mathbf{B} = \nabla\mathbf{B}_0 + \nabla\mathbf{B}' = 0. \qquad (7.3)$$

Таким образом, формула (6.99), а следовательно, и формула (6.98) справедливы не только для поля в вакууме, но и для поля в веществе.

7.2. Напряженность магнитного поля

Напишем выражение для ротора результирующего поля (7.1):

$$[\nabla\mathbf{B}] = [\nabla\mathbf{B}_0] + [\nabla\mathbf{B}'].$$

Согласно (6.106) $[\nabla\mathbf{B}_0] = \mu_0\mathbf{j}$, где $\mathbf{j}$ — плотность макроскопического тока. Аналогично ротор вектора $\mathbf{B}'$ должен быть пропорционален плотности молекулярных токов:

$$[\nabla\mathbf{B}'] = \mu_0\mathbf{j}_{\text{мол}}.$$

Следовательно, ротор результирующего поля определяется формулой

$$[\nabla\mathbf{B}] = \mu_0(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{мол}}). \qquad (7.4)$$

Из (7.4) вытекает, что при вычислении ротора поля в магнетиках мы сталкиваемся с затруднением, аналогичным тому, с которым мы столкнулись при рассмотрении электрического поля в диэлектриках (см. формулу (2.16)):

для того чтобы определить ротор **B**, нужно знать плотность не только макроскопических, но также и молекулярных токов. Плотность же молекулярных токов в свою очередь зависит от значения вектора **B**. Путь, позволяющий обойти это затруднение, также аналогичен тому пути, которым мы воспользовались в § 2.5. Оказывается, можно найти такую вспомогательную величину, ротор которой определяется лишь плотностью макроскопических токов.

Чтобы установить вид этой вспомогательной величины, попробуем выразить плотность молекулярных токов $\mathbf{j}_{\text{мол}}$ через намагниченность магнетика **J**[1]. С этой целью вычислим алгебраическую сумму молекулярных токов, охватываемых некоторым контуром Г. Эта сумма равна

$$\int_S \mathbf{j}_{\text{мол}}\, d\mathbf{S}, \tag{7.5}$$

где S — поверхность, натянутая на контур.

В алгебраическую сумму молекулярных токов входят только те молекулярные токи, которые оказываются «нанизанными» на контур (см. ток $I'_{\text{мол}}$ на рис. 7.1). Токи, не «нанизанные» на контур, либо не пересекают натянутую на контур поверхность совсем, либо пересекают эту поверхность дважды — один раз в одном направлении,

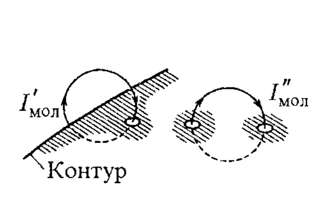


Рис. 7.1

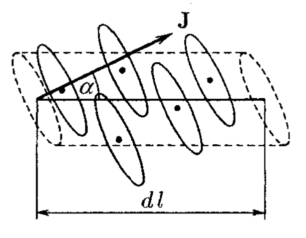


Рис. 7.2

второй раз в другом (см. ток $I''_{\text{мол}}$ на рис. 7.1). В результате их вклад в алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром, оказывается равным нулю.

Из рис. 7.2 видно, что элемент контура dl, образующий с направлением намагниченности **J** угол α, нанизывает на себя те молекулярные токи, центры которых попадают внутрь косого цилиндра с объемом $S_{\text{мол}} \cos\alpha\, dl$

[1]) В § 2.5 мы выразили плотность связанных зарядов через поляризованность диэлектрика **P**.

($S_{\text{мол}}$ — площадь, охватываемая отдельным молекулярным током). Если n — число молекул в единице объема, то суммарный ток, охватываемый элементом dl, равен $I_{\text{мол}} n S_{\text{мол}} \cos\alpha\, dl$. Произведение $I_{\text{мол}} S_{\text{мол}}$ равно магнитному моменту p_{m} отдельного молекулярного тока. Следовательно, выражение $I_{\text{мол}} S_{\text{мол}} n$ представляет собой магнитный момент единицы объема, т. е. дает модуль вектора $\mathbf{j}$, а $I_{\text{мол}} S_{\text{мол}} n \cos\alpha$ — проекцию вектора $\mathbf{J}$ на направление элемента dl. Таким образом, суммарный молекулярный ток, охватываемый элементом dl, равен $\mathbf{J}\, d\mathbf{l}$, а сумма молекулярных токов, охватываемых всем контуром (см. (7.5)), равна

$$\int\limits_S \mathbf{j}_{\text{мол}}\, d\mathbf{S} = \oint\limits_\Gamma \mathbf{J}\, d\mathbf{l}.$$

Преобразовав правую часть по теореме Стокса, получим

$$\int\limits_S \mathbf{j}_{\text{мол}}\, d\mathbf{S} = \int\limits_S [\nabla\mathbf{J}]\, d\mathbf{S}.$$

Равенство, к которому мы пришли, должно выполняться при произвольном выборе поверхности S. Это возможно лишь в том случае, если подынтегральные выражения равны в каждой точке магнетика:

$$\mathbf{j}_{\text{мол}} = [\nabla\mathbf{J}]. \tag{7.6}$$

Таким образом, плотность молекулярных токов определяется значением ротора намагниченности. В случае, когда $[\nabla\mathbf{J}] = 0$, молекулярные токи отдельных молекул ориентированы так, что их сумма в среднем равна нулю.

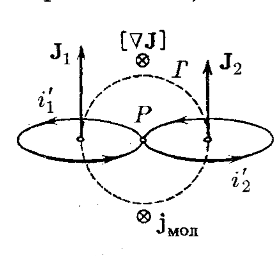


Рис. 7.3

Формула (7.6) допускает следующую наглядную интерпретацию. На рис. 7.3 изображены векторы намагниченности $\mathbf{J}_1$ и $\mathbf{J}_2$ в непосредственной близости к некоторой точке P. Точка P и оба вектора лежат в плоскости рисунка. Изображенный штриховой линией контур Γ также расположен в плоскости рисунка. Если характер намагниченности таков, что векторы $\mathbf{J}_1$ и $\mathbf{J}_2$ одинаковы по модулю, то циркуляция $\mathbf{J}$ по контуру Γ будет равна нулю. Соответственно $[\nabla\mathbf{J}]$ в точке P также будет равен нулю.

Намагниченностям $\mathbf{J}_1$ и $\mathbf{J}_2$ можно сопоставить молекулярные токи i_1' и i_2', текущие по контурам, изображенным на рис. 7.3 сплошными линиями. Эти контуры лежат в плоскости, перпендикулярной к плоскости рисунка. При одинаковом направлении векторов $\mathbf{J}_1$ и $\mathbf{J}_2$ направления токов i_1' и i_2' в точке P будут взаимно противоположными. В силу $J_1 = J_2$ токи i_1' и i_2' одинаковы по величине, вследствие чего результирующий молекулярный ток в точке P оказывается, как и $[\nabla\mathbf{J}]$, равным нулю: $\mathbf{j}_{\text{мол}} = 0$.

Теперь допустим, что $J_1 > J_2$. Тогда циркуляция $\mathbf{J}$ по контуру Г окажется отличной от нуля. Соответственно поле вектора $\mathbf{J}$ в точке P будет характеризоваться вектором $[\nabla\mathbf{J}]$, направленным за чертеж. Большей намагниченности отвечает больший молекулярный ток; поэтому $i_1' > i_2'$. В итоге в точке P будет наблюдаться отличный от нуля результирующий ток, характеризуемый плотностью $\mathbf{j}_{\text{мол}}$, направленной так же, как и $\nabla\mathbf{J}$, за чертеж. В случае $J_1 < J_2$ векторы $[\nabla\mathbf{J}]$ и $\mathbf{j}_{\text{мол}}$ будут направлены не за чертеж, а на нас.

Итак, в точках, где отличен от нуля ротор намагниченности, оказывается отличной от нуля и плотность молекулярных токов, причем векторы $[\nabla\mathbf{J}]$ и $\mathbf{j}_{\text{мол}}$ имеют одинаковое направление (см. (7.6)).

Подставим выражение (7.6) для плотности молекулярных токов в формулу (7.4):

$$[\nabla\mathbf{B}] = \mu_0\mathbf{j} + \mu_0[\nabla\mathbf{J}].$$

Разделив это соотношение на μ_0 и объединив вместе роторы, получим

$$\left[\nabla, \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}\right)\right] = \mathbf{j}. \tag{7.7}$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \tag{7.8}$$

есть искомая нами вспомогательная величина, ротор которой определяется одними лишь макроскопическими токами. Эта величина называется напряженностью магнитного поля.

В соответствии с (7.7)

$$[\nabla\mathbf{H}] = \mathbf{j} \tag{7.9}$$

(ротор вектора **H** равен вектору плотности макроскопических токов).

Возьмем произвольный контур Г с натянутой на него поверхностью S и образуем выражение

$$\int_S [\nabla \mathbf{H}]\, d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S}.$$

Согласно теореме Стокса левая чать этого равенства эквивалентна циркуляции вектора **H** по контуру Г. Следовательно,

$$\oint_\Gamma \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S}. \qquad (7.10)$$

Если макроскопические токи текут по проводам, охватываемым контуром, соотношение (7.10) можно написать в виде

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \sum_k I_k. \qquad (7.11)$$

Формулы (7.10) и (7.11) выражают теорему о циркуляции вектора **H**: *циркуляция вектора напряженности магнитного поля по некоторому контуру равна алгебраической сумме макроскопических токов, охватываемых этим контуром.*

Напряженность магнитного поля **H** является аналогом электрического смещения **D**. Первоначально предполагалось, что в природе имеются подобные электрическим зарядам магнитные массы, и учение о магнетизме развивалось по аналогии с учением об электричестве. В те времена и были введены названия «магнитная индукция» для **B** и «напряженность поля» для **H**. Впоследствии выяснилось, что магнитных масс в природе не существует и что величина, названная магнитной индукцией, в действительности является аналогом не электрического смещения **D**, а напряженности электрического поля **E** (соответственно **H** — аналогом не **E**, а **D**). Однако изменять уже установившуюся терминологию не стали, тем более, что вследствие различной природы электрического и магнитного полей (электростатическое поле потенциально, магнитное — соленоидально [2]) величины **B** и **D** обнаруживают много сходства в своем поведении (например, линии

---

[2]) Соленоидальным называется поле, не имеющее источников. В каждой точке такого поля дивергенция равна нулю.

B, как и линии **D**, не претерпевают разрыва на границе двух сред).

В вакууме $\mathbf{J} = 0$, поэтому **H** превращается в $\mathbf{B}/\mu_0$ и формулы (7.9) и (7.11) переходят в формулы (6.106) и (6.104).

В соответствии с (6.25) напряженность поля прямого тока в вакууме определяется выражением

$$H = \frac{1}{4\pi}\frac{2I}{b}, \tag{7.12}$$

из которого следует, что напряженность магнитного поля имеет размерность, равную размерности силы тока, деленной на размерность длины. В связи с этим единица напряженности магнитного поля в СИ носит название ампер на метр (А/м).

В гауссовой системе напряженностью магнитного поля называют величину

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J}. \tag{7.13}$$

Из этого определения следует, что в вакууме **H** совпадает с **B**. В соответствии с этим единица **H** в гауссовой системе, называемая эрстедом (Э), имеет ту же величину и размерность, что и единица магнитной индукции — гаусс (Гс). По существу эрстед и гаусс суть разные названия одной и той же единицы. Если этой единицей измеряют **H**, ее называют эрстедом, если измеряют **B**, то — гауссом.

Намагниченность принято связывать не с магнитной индукцией, а с напряженностью поля. Полагают, что в каждой точке магнетика

$$\mathbf{J} = \chi\mathbf{H}, \tag{7.14}$$

где χ — характерная для данного магнетика величина, называемая магнитной восприимчивостью[3]). Опыт показывает, что для слабомагнитных (неферромагнитных) веществ при не слишком сильных полях χ не зависит от **H**. Согласно (7.8) размерность **H** совпадает с размерностью **J**. Следовательно, χ — безразмерная величина.

---

[3]) В анизотропных средах направления векторов **J** и **H**, вообще говоря, не совпадают. Для таких сред связь между векторами **J** и **H** осуществляется тензором магнитной восприимчивости (см. подстрочное примечание на с. 75).

Подставив в формулу (7.8) выражение (7.14) для **J**, получим

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \chi\mathbf{H},$$

откуда

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0(1+\chi)}. \qquad (7.15)$$

Безразмерная величина

$$\mu = 1 + \chi \qquad (7.16)$$

называется относительной магнитной проницаемостью, или просто магнитной проницаемостью вещества[4]).

В отличие от диэлектрической восприимчивости $\varkappa$, которая может иметь лишь положительные значения (поляризованность **P** в изотропном диэлектрике всегда направлена по полю **E**), магнитная восприимчивость χ бывает как положительной, так и отрицательной. Поэтому магнитная проницаемость μ может быть как больше, так и меньше единицы.

С учетом (7.16) формуле (7.15) можно придать вид

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0\mu}. \qquad (7.17)$$

Таким образом, напряженность магнитного поля **H** есть вектор, имеющий то же направление, что и вектор **B**, но в $\mu_0\mu$ раз меньший по модулю (в анизотропных средах векторы **H** и **B**, вообще говоря, не совпадают по направлению).

Соотношение (7.14), связывающее векторы **J** и **H**, имеет точно такой вид и в гауссовой системе. Подставив это выражение в формулу (7.13), получим

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\chi\mathbf{H},$$

откуда

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{1+4\pi\chi}. \qquad (7.18)$$

---

[4]) В электротехнике вводят так называемую абсолютную магнитную проницаемость $\mu_a = \mu_0\mu$. Однако эта величина физического смысла не имеет, и мы ею пользоваться не будем.

Безразмерная величина

$$\mu = 1 + 4\pi\chi \tag{7.19}$$

называется **магнитной проницаемостью** вещества. Введя эту величину в формулу (7.18), получим

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}. \tag{7.20}$$

Значение μ в гауссовой системе совпадает со значением μ в СИ. Сопоставление формул (7.16) и (7.19) показывает, что значение магнитной восприимчивости в СИ превосходит в 4π раз значение χ в гауссовой системе:

$$\chi_{\text{СИ}} = 4\pi\chi_{\text{ГС}}. \tag{7.21}$$

7.3. Вычисление поля в магнетиках

Рассмотрим поле, создаваемое бесконечно длинным круглым намагниченным стержнем. Намагниченность $\mathbf{J}$ будем считать всюду одинаковой и направленной по оси стержня. Разобьем мысленно стержень на перпендикулярные к оси слои толщины dl. Каждый слой разобьем в свою очередь на малые цилиндрические элементы с основаниями произвольной формы (рис. 7.4 *а*). Каждый такой элемент обладает магнитным моментом

$$dp_{\text{m}} = J\,dS\,dl, \tag{7.22}$$

где dS — площадь основания.

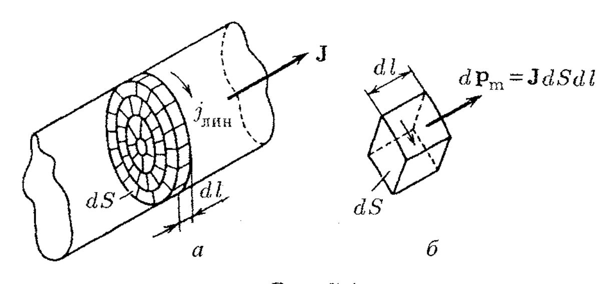


Рис. 7.4

Поле $d\mathbf{B}'$, создаваемое элементом на расстояниях, больших по сравнению с его размерами, эквивалентно полю, которое создавал бы ток силы $I = J\,dl$, обтекающий элемент по его боковой поверхности (см. рис. 7.4 *б*). Действительно, магнитный момент такого тока равен $dp_{\text{m}} =$

$= I dS = J\, dl\, dS$ (ср. с (7.22)), магнитное же поле на больших расстояниях определяется только модулем и направлением магнитного момента (см. § 6.9).

Воображаемые токи, текущие по общему для двух соседних элементов участку поверхности, одинаковы по величине и противоположны по направлению, поэтому сумма их равна нулю. Таким образом, при суммировании токов, обтекающих боковые поверхности элементов одного слоя, некомпенсированными оказываются лишь токи, текущие по боковой поверхности слоя.

Из сказанного вытекает, что слой стержня толщины dl создает поле, эквивалентное полю, которое создавал бы ток силы $J\, dl$, обтекающий слой по боковой поверхности (линейная плотность этого тока равна $j_{\text{лин}} = J$). Весь же бесконечный намагниченный стержень создает поле, эквивалентное полю цилиндра, обтекаемого током с линейной плотностью $j_{\text{лин}} = J$. В § 6.12 мы выяснили, что вне такого цилиндра поле равно нулю, а внутри цилиндра поле однородно и равно $\mu_0 j_{\text{лин}}$.

Таким образом, мы выяснили характер поля $\mathbf{B}'$, создаваемого однородно намагниченным бесконечно длинным круглым стержнем. Вне стержня это поле равно нулю. Внутри стержня поле однородно и равно

$$\mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{J}. \tag{7.23}$$

Пусть имеется однородное поле $\mathbf{B}_0$, создаваемое макротоками в вакууме. Согласно (7.17) напряженность этого поля равна

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}. \tag{7.24}$$

Внесем в это поле (мы будем называть его внешним) бесконечно длинный круглый стержень из однородного и изотропного магнетика, расположив его вдоль направления $\mathbf{B}_0$. Из соображений симметрии следует, что возникающая в стержне намагниченность $\mathbf{J}$ коллинеарна с вектором $\mathbf{B}_0$.

Намагниченный стержень создает внутри себя поле $\mathbf{B}'$, определяемое формулой (7.23). В результате поле внутри стержня станет равным

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{J}. \tag{7.25}$$

Подставив это значение $\mathbf{B}$ в формулу (7.8), получим напря-

женность поля внутри стержня

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mathbf{H}_0$$

(см. (7.24)). Таким образом, напряженность поля в стержне оказывается совпадающей с напряженностью внешнего поля.

Умножив $\mathbf{H}$ на $\mu_0\mu$, получим магнитную индукцию внутри стержня:

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H} = \mu_0\mu\frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mu\mathbf{B}_0. \tag{7.26}$$

Отсюда следует, что магнитная проницаемость μ показывает, во сколько раз усиливается поле в магнетике (ср. с (2.33)).

Заметим, что, поскольку поле $\mathbf{B}'$ отлично от нуля только внутри стержня, магнитное поле вне стержня остается без изменений.

Полученный нами результат бывает справедлив в тех случаях, когда однородный и изотропный магнетик заполняет объем, ограниченный поверхностями, которые образованы линиями напряженности внешнего поля[5]). В противном случае напряженность поля, определяемая формулой (7.8), не совпадает с $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0/\mu_0$.

Условно полагают, что напряженность поля в магнетике равна

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_\triangleright, \tag{7.27}$$

где $\mathbf{H}_0$ — внешнее поле, а $\mathbf{H}_\triangleright$ — так называемое р а з м а г н и ч и в а ю щ е е п о л е, которое предполагается пропорциональным намагниченности:

$$\mathbf{H}_\triangleright = N\mathbf{J}. \tag{7.28}$$

Коэффициент пропорциональности N называется р а з м а г н и ч и в а ю щ и м ф а к т о р о м. Он зависит от формы магнетика. Для тела, поверхность которого не пересекается линиями напряженности внешнего поля, как мы видели, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$, т. е. размагничивающий фактор равен нулю. Для тонкого диска, перпендикулярного к внешнему полю, $N = 1$, для шара $N = 1/3$.

---

[5]) Напомним, что в случае электрического поля $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0$ при условии, что однородный и изотропный диэлектрик заполняет объем, ограниченный эквипотенциальными поверхностями, т. е. поверхностями, ортогональными линиям напряженности внешнего поля.

Соответствующий расчет дает, что в случае, когда однородный и изотропный магнетик, имеющий форму эллипсоида, помещается в однородное внешнее поле, магнитное поле в нем хотя и отлично от внешнего, но также однородно.

То же справедливо для шара, представляющего собой частный случай эллипсоида, а также для длинного стержня и тонкого диска, которые можно считать предельными случаями эллипсоида.

В заключение найдем напряженность поля бесконечно длинного соленоида, заполненного однородным и изотропным магнетиком (или погруженного в безграничный однородный и изотропный магнетик). Применив к контуру, изображенному на рис. 6.3, теорему о циркуляции (см. (7.11)), получим соотношение $Ha = naI$. Отсюда

$$H = nI. \qquad (7.29)$$

Таким образом, напряженность поля внутри бесконечно длинного соленоида равна произведению силы тока на число витков, приходящееся на единицу длины. Вне соленоида напряженность поля равна нулю.

7.4. Условия на границе двух магнетиков

Вблизи поверхности раздела двух магнетиков векторы **B** и **H** должны удовлетворять определенным граничным условиям, которые вытекают из соотношений

$$\nabla\mathbf{B} = 0, \quad [\nabla\mathbf{H}] = \mathbf{j} \qquad (7.30)$$

(см. формулы (7.3) и (7.9)). Мы рассматриваем стационарные, т. е. не изменяющиеся со временем, поля.

Возьмем на границе двух магнетиков с проницаемостями μ_1 и μ_2 воображаемую цилиндрическую поверхность высоты h с основаниями S_1 и S_2, расположенными по разные стороны поверхности раздела (рис. 7.5). Поток вектора **B** через эту поверхность равен

$$\Phi_B = B_{1n}S + B_{2n}S + \langle B_n\rangle S_{\text{бок}} \qquad (7.31)$$

(ср. с (2.46)). В соответствии с тем, что $\nabla\mathbf{B} = 0$, поток вектора **B** через любую замкнутую поверхность равен нулю. Приравняв нулю выражение (7.31) и сделав переход

$h \to 0$, придем к соотношению $B_{1n} = -B_{2n}$. Если проецировать $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ на одну и ту же нормаль, получится условие

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{7.32}$$

(ср. с (2.47)). Заменив согласно (7.17) составляющие $\mathbf{B}$ соответствующими составляющими вектора $\mathbf{H}$, умноженными на $\mu_0\mu$, получим соотношение

$$\mu_0\mu_1 H_{1n} = \mu_0\mu_2 H_{2n},$$

из которого следует, что

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{7.33}$$

Теперь возьмем на границе магнетиков прямоугольный контур (рис. 7.6) и вычислим для него циркуляцию $\mathbf{H}$. При малых размерах контура циркуляцию можно представить в виде

$$\oint H_l\,dl = H_{1\tau}a - H_{2\tau}a + \langle H_l\rangle \cdot 2b, \tag{7.34}$$

где $\langle H_l\rangle$ — среднее значение H_l на перпендикулярных к границе участках контура. Если по границе раздела не текут макроскопические токи, $[\nabla\mathbf{H}]$ в пределах контура

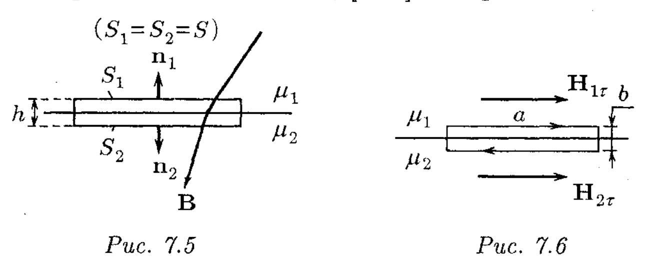


Рис. 7.5 *Рис. 7.6*

будет равен нулю. Поэтому и циркуляция будет равна нулю. Положив выражение (7.34) равным нулю и осуществив предельный переход $b \to 0$, придем к соотношению

$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \tag{7.35}$$

(ср. с (2.44)). Заменив составляющие $\mathbf{H}$ соответствующими составляющими вектора $\mathbf{B}$, деленными на $\mu_0\mu$, получим соотношение

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_0\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_0\mu_2},$$

из которого следует, что

$$\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \tag{7.36}$$

Резюмируя, можно сказать, что при переходе через границу раздела двух магнетиков нормальная составляющая вектора **B** и тангенциальная составляющая вектора **H** изменяются непрерывно. Тангенциальная же составляющая вектора **B** и нормальная составляющая вектора **H** при переходе через границу раздела претерпевают разрыв. Таким образом, при переходе через границу раздела двух сред вектор **B** ведет себя аналогично вектору **D**, а вектор **H** — аналогично вектору **E**.

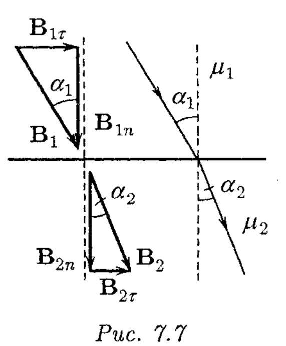


Рис. 7.7

На рис. 7.7 показано поведение линий **B** при пересечении границы раздела двух магнетиков. Обозначим углы между линиями **B** и нормалью к поверхности раздела соответственно α_1 и α_2. Отношение тангенсов этих углов равно

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{B_{1\tau}/B_{1n}}{B_{2\tau}/B_{2n}},$$

откуда с учетом (7.32) и (7.36) получается аналогичный (2.49) закон преломления линий магнитной индукции:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \tag{7.37}$$

При переходе в магнетик с большей μ линии магнитной индукции отклоняются от нормали к поверхности. Это приводит к сгущению линий. Сгущение линий **B** в веществе с большой магнитной проницаемостью дает возможность формировать магнитные пучки, т. е. придавать им необходимые форму и направление. В частности, для того чтобы осуществить магнитную защиту некоторого объема, его окружают железным экраном. Из рис. 7.8 видно, что сгущение линий магнитной индукции в толще экрана приводит к ослаблению поля внутри.

На рис. 7.9 дана схема лабораторного электромагнита. Он состоит из железного сердечника, на который насаже-

ны питаемые током катушки. Линии магнитной индукции оказываются сосредоточенными в основном внутри сердечника. Лишь в узком воздушном зазоре они проходят в среде с малой μ. Вектор **B** пересекает границы

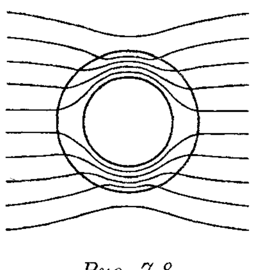


Рис. 7.8

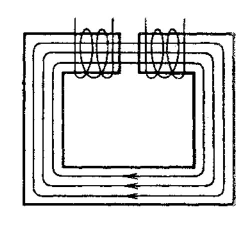


Рис. 7.9

между воздушным зазором и сердечником по нормали к поверхности раздела. Отсюда согласно (7.32) следует, что магнитная индукция в зазоре и в сердечнике одинакова по модулю. Применим теорему о циркуляции **H** к контуру, проходящему по оси сердечника. Напряженность поля можно считать всюду в железе одинаковой и равной $H_{\text{жел}} = B/(\mu_0\mu_{\text{жел}})$. В воздухе $H_{\text{возд}} = B/(\mu_0\mu_{\text{возд}})$. Обозначим длину участка контура в железе через $l_{\text{жел}}$, а в зазоре — через $l_{\text{возд}}$. Тогда циркуляцию можно представить в виде $H_{\text{жел}}l_{\text{жел}} + H_{\text{возд}}l_{\text{возд}}$. Согласно (7.11) эта циркуляция должна быть равна NI, где N — суммарное число витков катушек электромагнита, I — сила тока. Таким образом,

$$\frac{B}{\mu_0\mu_{\text{жел}}}l_{\text{жел}} + \frac{B}{\mu_0\mu_{\text{возд}}}l_{\text{возд}} = NI.$$

Отсюда

$$B = \mu_0 I\frac{N}{l_{\text{возд}}/\mu_{\text{возд}} + l_{\text{жел}}/\mu_{\text{жел}}} \approx \mu_0 I\frac{N}{l_{\text{возд}} + l_{\text{жел}}/\mu_{\text{жел}}}$$

($\mu_{\text{возд}}$ отличается от единицы лишь в пятом знаке после запятой).

Обычно $l_{\text{возд}}$ бывает порядка 0,1 м, $l_{\text{жел}}$ — порядка 1 м, $\mu_{\text{жел}}$ достигает значений порядка нескольких тысяч. Поэтому вторым слагаемым в знаменателе можно пренебречь и написать, что

$$B = \mu_0 I\frac{N}{l_{\text{возд}}}. \qquad (7.38)$$

Следовательно, магнитная индукция в зазоре электромагнита имеет такое числовое значение, какое она имела бы внутри тороида без сердечника, на единицу длины которого было бы намотано число витков, равное $N/l_{\text{возд}}$ (см. (6.113)). Увеличивая общее число витков и уменьшая размеры воздушного зазора, можно получать поля с большим значением B. Практически с помощью электромагнитов с железным сердечником удается получать поля с B порядка нескольких тесла (несколько десятков тысяч гауссов).

7.5. Виды магнетиков

Формула (7.14) определяет магнитную восприимчивость χ единицы объема вещества. Часто вместо этой восприимчивости пользуются отнесенной к одному молю вещества молярной (для химически простых веществ — атомной) восприимчивостью $\chi_{\text{м}}$ ($\chi_{\text{ат}}$). Очевидно, что $\chi_{\text{м}} = \chi V_{\text{м}}$, где $V_{\text{м}}$ — объем моля вещества. В то время как χ — безразмерная величина, $\chi_{\text{м}}$ измеряется в м^3/моль.

В зависимости от знака и величины магнитной восприимчивости все магнетики подразделяются на три группы:

1) диамагнетики, у которых χ отрицательна и мала по абсолютной величине ($|\chi_{\text{м}}| \sim 10^{-11} \div 10^{-10}$ м^3/моль);

2) парамагнетики, у которых χ тоже невелика, но положительна ($\chi_{\text{м}} \sim 10^{-10} \div 10^{-9}$ м^3/моль);

3) ферромагнетики, у которых χ положительна и достигает очень больших значений ($\chi_{\text{м}} \sim 1$м^3/моль). Кроме того, в отличие от диа- и парамагнетиков, для которых χ не зависит от H, восприимчивость ферромагнетиков является функцией напряженности магнитного поля.

Таким образом, в изотропных веществах намагниченность $\mathbf{J}$ может как совпадать по направлению с $\mathbf{H}$ (у пара- и ферромагнетиков), так и быть направленной в противоположную сторону (у диамагнетиков). Напомним, что у изотропных диэлектриков поляризованность всегда направлена в ту же сторону, что и $\mathbf{E}$.

7.6. Магнитомеханические явления

Природа молекулярных токов стала понятной после того, как опытами Резерфорда было установлено, что атомы всех веществ состоят из положительно заряженного ядра

и движущихся вокруг него отрицательно заряженных электронов.

Движение электронов в атомах подчиняется квантовым законам; в частности, понятие траектории к электронам, движущимся в атоме, не применимо. Однако диамагнетизм вещества удается объяснить, пользуясь моделью Бора, согласно которой электроны в атомах движутся по стационарным круговым орбитам[6]).

Пусть электрон движется со скоростью v по орбите радиуса r (рис. 7.10). Через площадку, расположенную в любом месте на пути электрона, переносится в единицу времени заряд $e\nu$, где e — заряд электрона, а ν — число оборотов в секунду. Следовательно, движущийся по орбите электрон образует круговой ток силы $I = e\nu$. Поскольку заряд электрона отрицателен, направление движения электрона и направление тока противоположны. Магнитный момент создаваемого электроном тока равен

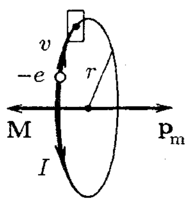


Рис. 7.10

$$p_{\mathrm{m}} = IS = e\nu\pi r^2.$$

Произведение $2\pi r\nu$ дает скорость движения электрона v, поэтому

$$p_{\mathrm{m}} = evr/2. \qquad (7.39)$$

Момент (7.39) обусловлен движением электрона по орбите, вследствие чего он называется **орбитальным магнитным моментом** электрона. Направление вектора $\mathbf{p}_{\mathrm{m}}$ образует с направлением тока правовинтовую, а с направлением движения электрона левовинтовую систему (см. рис. 7.10).

Движущийся по орбите электрон обладает моментом импульса

$$M = mvr \qquad (7.40)$$

(m — масса электрона). Вектор $\mathbf{M}$ называют **орбитальным механическим моментом** электрона. Он образует с направлением движения электрона правовинтовую систему. Следовательно, направления векторов $\mathbf{p}_{\mathrm{m}}$ и $\mathbf{M}$ противоположны.

---

[6]) Устойчивость таких орбит противоречит законам классической физики (см. § 3.3 кн. 5).

Отношение магнитного момента элементарной частицы к ее механическому моменту называется **магнитомеханическим** (или **гиромагнитным**) **отношением**. Для электрона оно равно

$$\frac{p_{\mathrm{m}}}{M} = -\frac{e}{2m} \tag{7.41}$$

(m — масса электрона; знак минус указывает на то, что направления моментов противоположны).

Вследствие вращения вокруг ядра электрон оказывается подобным волчку. Это обстоятельство лежит в основе так называемых **магнитомеханических явлений**, заключающихся в том, что намагничение магнетика приводит к его вращению и, наоборот, вращение магнетика вызывает его намагничение. Существование первого явления было доказано экспериментально Эйнштейном и де Гаазом[7]), второго — Барнеттом[8]).

В основе опыта Эйнштейна и де Гааза лежат следующие соображения. Если намагнитить стержень из магнетика, то магнитные моменты электронов установятся по направлению поля, а механические моменты — против поля. В результате суммарный механический момент электронов $\sum \mathbf{M}_i$ станет отличным от нуля (первоначально вследствие хаотической ориентации отдельных моментов он был равен нулю). Момент импульса системы стержень+электроны должен остаться без изменений. Поэтому стержень приобретает момент импульса, равный $-\sum \mathbf{M}_i$, и, следовательно, приходит во вращение. Изменение направления намагниченности приведет к изменению направления вращения стержня.

Механическую модель этого опыта можно осуществить, посадив человека на вращающийся стул и дав ему в руки вращающееся массивное колесо. Повернув колесо осью вверх, человек приходит во вращение в сторону, противоположную направлению вращения колеса. Повернув колесо осью вниз, человек начинает вращаться в другую сторону.

Опыт Эйнштейна и де Гааза осуществлялся следующим образом (рис. 7.11). Тонкий железный стержень подвешивался на упругой нити и помещался внутрь соленоида. Закручивание нити при намагничении стержня постоянным магнитным полем получалось весьма малым.

---

[7]) Вандер Иоханнес де Гааз (1878–1960) — нидерландский физик.

[8]) Сэмуел Джексон Барнетт (1873–1956) — американский физик.

Для усиления эффекта был применен метод резонанса — соленоид питался переменным током, частота которого подбиралась равной собственной частоте механических колебаний системы. При этих условиях амплитуда колебаний достигала значений, которые можно было измерить, наблюдая смещения светового зайчика, отраженного от зеркальца, укрепленного на нити. Из данных опыта было вычислено магнитомеханическое отношение, которое оказалось равным $-e/m$. Таким образом, знак заряда носителей, создающих молекулярные токи, совпал со знаком заряда электрона. Полученный результат превысил ожидаемое значение магнитомеханического отношения (7.41) в два раза.

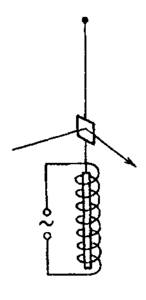


Рис. 7.11

Чтобы понять опыт Барнетта, вспомним, что при попытках вовлечь гироскоп во вращение вокруг некоторого направления ось гироскопа поворачивается так, чтобы направления собственного и принудительного вращений гироскопа совпали (см. § 5.9 кн. 1). Если установить гироскоп, закрепленный в карданном подвесе, на диск центробежной машины и привести ее во вращение, то ось гироскопа установится по вертикали, причем так, что направление вращения гироскопа совпадет с направлением вращения диска. При изменении направления вращения центробежной машины ось гироскопа поворачивается на 180°, т. е. так, чтобы направления обоих вращений снова совпали.

Барнетт приводил железный стержень в очень быстрое вращение вокруг его оси и измерял возникающее при этом намагничение. Из результатов этого опыта Барнетт также получил для магнитомеханического отношения значения, в два раза превышающие значение (7.41).

В дальнейшем выяснилось, что, кроме орбитальных моментов (7.39) и (7.40), электрон обладает собственным механическим M_s и магнитным p_{m} моментами, для которых магнитомеханическое отношение равно

$$\frac{p_{\mathrm{m}s}}{M_s} = -\frac{e}{m}, \qquad (7.42)$$

т. е. совпадает со значением, полученным в опытах Эйнштейна–де Гааза и Барнетта. Отсюда следует, что магнитные свойства железа обусловлены не орбитальным, а собственным магнитным моментом электронов.

Существование собственных моментов электрона первоначально пытались объяснить, рассматривая электрон как заряженный шарик, вращающийся вокруг своей оси. В соответствии с этим собственный механический момент электрона получил название спин (от английского to spin — вращаться). Однако вскоре обнаружилось, что такое представление приводит к ряду противоречий, и от гипотезы о «вращающемся» электроне пришлось отказаться. В настоящее время принимается, что собственный механический момент (спин) и связанный с ним собственный (спиновый) магнитный момент являются такими же неотъемлемыми свойствами электрона, как его масса и заряд.

Спином обладают не только электроны, но и другие элементарные частицы. Спин[9]) элементарных частиц оказывается целым или полуцелым кратным величины $\hbar$, которая равна постоянной Планка h, деленной на 2π:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\text{Дж} \cdot \text{с} = 1{,}05 \cdot 10^{-27}\text{эрг} \cdot \text{с}. \qquad (7.43)$$

В частности, для электрона $M_s = \hbar/2$, в связи с чем говорят, что спин электрона равен 1/2. Таким образом, $\hbar$ представляет собой естественную единицу момента импульса, подобно тому как элементарный заряд e является естественной единицей заряда. В соответствии с (7.42) собственный магнитный момент электрона равен

$$p_{\text{m}} = -\frac{e}{m}M_s = -\frac{e}{m}\frac{\hbar}{2} = -\frac{e\hbar}{2m}. \qquad (7.44)$$

Величину

$$\mu_{\text{Б}} = \frac{e\hbar}{2m} =$$

$$= 0{,}927 \cdot 10^{-23}\text{Дж/Тл} = 0{,}927 \cdot 10^{-20}\ \text{эрг/Гс}^{10)} \qquad (7.45)$$

называют магнетоном Бора. Следовательно, собственный магнитный момент электрона равен одному магнетону Бора.

---

[9]) Точнее, максимальное значение проекции спина на выделенное в пространстве направление, например на направление внешнего поля.

[10]) Согласно формуле $W = -\mathbf{p}_{\text{m}}\mathbf{B}$ размерность магнитного момента равна размерности энергии (джоуль или эрг), деленной на размерность магнитной индукции (тесла или гаусс).

Магнитный момент атома слагается из орбитальных и собственных моментов входящих в его состав электронов, а также из магнитного момента ядра (который обусловлен магнитными моментами входящих в состав ядра элементарных частиц — протонов и нейтронов). Магнитный момент ядра значительно меньше моментов электронов; поэтому при рассмотрении многих вопросов им можно пренебречь и считать, что магнитный момент атома равен векторной сумме магнитных моментов электронов. Магнитный момент молекулы также можно считать равным сумме магнитных моментов входящих в ее состав электронов.

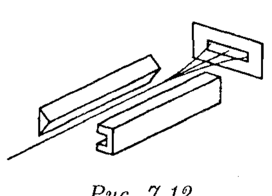


Рис. 7.12

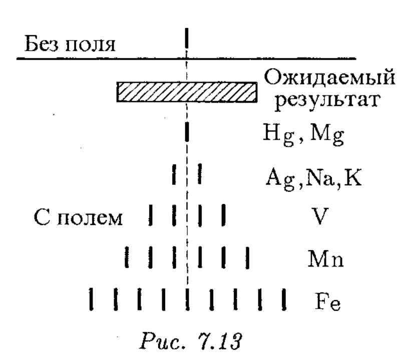


Рис. 7.13

Экспериментальное определение магнитных моментов атомов было осуществлено Штерном [11]) и Герлахом [12]). В их опытах пучок атомов пропускался через сильно неоднородное магнитное поле. Неоднородность поля достигалась за счет специальной формы полюсных наконечников электромагнита (рис. 7.12). Согласно формуле (6.80) на атомы пучка должна действовать сила

$$F = p_{\mathrm{m}}\frac{\partial B}{\partial x}\cos\alpha,$$

модуль и знак которой зависят от угла α, образуемого вектором $\mathbf{p}_{\mathrm{m}}$ с направлением поля. При хаотическом распределении моментов атомов по направлениям в пучке имеются частицы, для которых значения α изменяются в пределах от 0 до π. В соответствии с этим предполагалось, что узкий пучок атомов после прохождения между полюсами образует на экране сплошной растянутый след, края которого соответствуют атомам с ориентациями под углами

[11]) Отто Штерн (1888–1969) — немецкий физик.

[12]) Вальтер Герлах (1889–1979) — немецкий физик.

$\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ (рис. 7.13). Опыт дал неожиданные результаты. Вместо сплошного растянутого следа получились отдельные линии, расположенные симметрично относительно следа пучка, полученного в отсутствие поля.

Опыт Штерна и Герлаха показал, что углы, под которыми ориентируются магнитные моменты атомов по отношению к магнитному полю, могут иметь только дискретные значения, т. е. что проекция магнитного момента на направление поля квантуется.

Число возможных значений проекции магнитного момента на направление магнитного поля для разных атомов различно. Для атомов серебра, алюминия, меди и щелочных металлов оно равно двум, для ванадия, азота и галогенов — четырем, для кислорода — пяти, марганца — шести, железа — девяти, кобальта — десяти и т. д.

Для магнитных моментов атомов измерения дали значения порядка нескольких магнетонов Бора. Некоторые атомы не обнаружили отклонения (см., например, след атомов ртути и магния на рис. 7.13), что указывает на отсутствие у них магнитного момента.

7.7. Диамагнетизм

Электрон, движущийся по орбите, подобен волчку. Поэтому ему должны быть свойственны все особенности поведения гироскопов под действием внешних сил; в частности, при соответствующих условиях должна возникать прецессия электронной орбиты. Условия, необходимые для прецессии, осуществляются, если атом находится во внешнем магнитном поле **B** (рис. 7.14). В этом случае на орбиту действует вращающий момент $\mathbf{N} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}]$, стремящийся установить орбитальный магнитный момент электрона $\mathbf{p}_m$ по направлению поля (при этом механический момент **M** установится против поля). Под действием момента **N** векторы $\mathbf{p}_m$ и **M** совершают прецессию вокруг направления вектора магнитной индукции **B**, скорость которой легко найти (см. § 5.9 кн. 1).

За время dt вектор **M** получает приращение $d\mathbf{M}$, равное

$$d\mathbf{M} = \mathbf{N}\,dt.$$

Вектор $d\mathbf{M}$, как и вектор **N**, перпендикулярен к плоскости, проходящей через векторы **B** и **M**; его модуль равен

$$|d\mathbf{M}| = p_m B \sin\alpha\,dt,$$

где α — угол между $\mathbf{p}_m$ и **B**.

За время dt плоскость, в которой лежит вектор **M**, повернется вокруг направления **B** на угол

$$d\vartheta = \frac{|d\mathbf{M}|}{M \sin\alpha} = \frac{p_{\text{m}} B \sin\alpha\, dt}{M \sin\alpha} = \frac{p_{\text{m}}}{M} B\, dt.$$

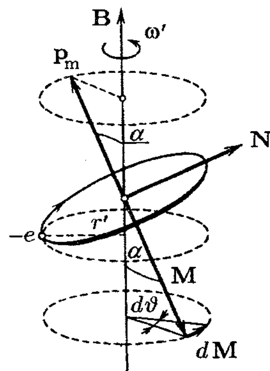
Разделив этот угол на время dt, найдем угловую скорость прецессии:

$$\omega_{\text{L}} = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{p_{\text{m}}}{M} B.$$

Подставив значение (7.41) отношения магнитного и механического моментов электрона, получим

$$\omega_{\text{L}} = \frac{eB}{2m}. \qquad (7.46)$$

Частоту (7.46) называют **частотой ларморовой прецессии** или просто **ларморовой частотой**[13]. Она не зависит ни от угла наклона орбиты по отношению к направлению магнитного поля, ни от радиуса орбиты или скорости электрона и, следовательно, для всех электронов, входящих в состав атома, одинакова.



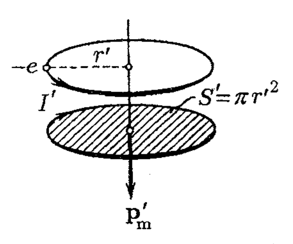


Рис. 7.14

Прецессия орбиты обусловливает дополнительное движение электрона вокруг направления поля. Если бы расстояние r' электрона от параллельной **B** оси, проходящей через центр орбиты, не изменялось, дополнительное движение электрона происходило бы по окружности радиуса r' (см. верхнюю окружность в нижней части рис. 7.14). Ему соответствовал бы круговой ток (см. нижнюю окружность, ограничивающую заштрихованную площадь) $I' = e(\omega_{\text{L}}/2\pi)$, магнитный момент которого

$$p'_{\text{m}} = I'S' = e\frac{\omega_{\text{L}}}{2\pi}\pi r'^2 = \frac{e\omega_{\text{L}}}{2} r'^2 \qquad (7.47)$$

[13]) Джозеф Лармор (1857–1942) — английский физик.

направлен в сторону, противоположную **B** (см. рисунок). Этот момент называется индуцированным (наведенным) магнитным моментом.

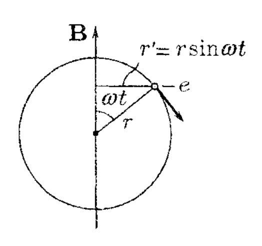


Рис. 7.15

В действительности, вследствие движения электрона по орбите, расстояние r' все время изменяется. Поэтому в формуле (7.47) нужно брать вместо r'^2 его среднее по времени значение $\langle r'^2 \rangle$. Это среднее зависит от угла α, характеризующего ориентацию плоскости орбиты по отношению к **B**. В частности, для орбиты, перпендикулярной к вектору **B**, r' постоянно и равно радиусу орбиты r. Для орбиты, плоскость которой проходит через направление **B**, r' изменяется по закону $r' = r \sin \omega t$, где ω — угловая скорость обращения электрона по орбите (рис. 7.15; вектор **B** и орбита лежат в плоскости рисунка). Следовательно, $\langle r'^2 \rangle = \langle r^2 \sin^2 \omega t \rangle = r^2/2$ ($\langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2$). Если произвести усреднение по всем возможным значениям α, считая их равновероятными, то получается

$$\langle r'^2 \rangle = \frac{2}{3} r^2. \tag{7.48}$$

Подставив в (7.47) значение (7.46) для ω_{L} и (7.48) для $\langle r'^2 \rangle$, получим для среднего значения индуцированного магнитного момента одного электрона следующее выражение:

$$\langle p'_{\mathrm{m}} \rangle = -\frac{e^2}{6m} r^2 B \tag{7.49}$$

(знак минус отражает то обстоятельство, что векторы $\langle \mathbf{p}'_{\mathrm{m}} \rangle$ и **B** направлены в противоположные стороны). Мы предполагали орбиту круговой. В общем случае (например, для эллиптической орбиты) вместо r^2 нужно взять $\langle r^2 \rangle$, т. е. средний квадрат расстояния электрона от ядра.

Просуммировав выражение (7.49) по всем электронам, найдем индуцированный магнитный момент атома:

$$p'_{\mathrm{m\,ат}} = \sum \langle p'_{\mathrm{m}} \rangle = -\frac{e^2 B}{6m} \sum_{k=1}^{Z} \langle r_k^2 \rangle \tag{7.50}$$

(Z — атомный номер химического элемента; число электронов в атоме равно Z).

Итак, под действием внешнего магнитного поля происходит прецессия электронных орбит с одинаковой для всех электронов угловой скоростью (7.46). Обусловленное прецессией дополнительное движение электронов приводит к возникновению индуцированного магнитного момента атома (7.50), направленного против поля. Ларморова прецессия возникает у всех без исключения веществ. Однако в тех случаях, когда атомы обладают сами по себе магнитным моментом, магнитное поле не только индуцирует момент (7.50), но и оказывает на магнитные моменты атомов ориентирующее действие, устанавливая их по направлению поля. Возникающий при этом положительный (т. е. направленный по полю) магнитный момент бывает значительно больше, чем отрицательный индуцированный момент. Поэтому результирующий момент оказывается положительным и вещество ведет себя как парамагнетик.

Диамагнетизм обнаруживают только те вещества, у которых атомы не обладают магнитным моментом (векторная сумма орбитальных и спиновых магнитных моментов электронов атома равна нулю). Если для такого вещества умножить равенство (7.50) на постоянную Авогадро, получится магнитный момент моля вещества. Разделив его на напряженность поля H, найдем молярную магнитную восприимчивость $\chi_{\text{м}}$. Магнитная проницаемость диамагнетиков практически равна единице. Поэтому можно положить $B/H = \mu_0$. Таким образом,

$$\chi_{\text{м}} = \frac{N_{\text{A}} p'_{\text{m ат}}}{H} = -\frac{\mu_0 N_{\text{A}} e^2}{6m} \sum_{k=1}^{Z} \langle r_k^2 \rangle. \qquad (7.51)$$

Отметим, что строгая квантовомеханическая теория приводит к точно такому выражению.

Подстановка в (7.51) числовых значений μ_0, N_{A}, e и m дает

$$\chi_{\text{м}} = -3,55 \cdot 10^9 \sum_{k=1}^{Z} \langle r_k^2 \rangle.$$

Радиусы электронных орбит имеют величину порядка 10^{-10} м. Следовательно, молярная диамагнитная восприимчивость получается порядка $10^{-11} \div 10^{-10}$, что хорошо согласуется с экспериментальными данными.

7.8. Парамагнетизм

Если магнитный момент p_{m} атомов отличен от нуля, вещество оказывается парамагнитным. Магнитное поле стремится установить магнитные моменты атомов вдоль **B**, тепловое движение стремится разбросать их равномерно по всем направлениям. В результате устанавливается некоторая преимущественная ориентация моментов вдоль поля, тем большая, чем больше B, и тем меньшая, чем выше температура.

П. Кюри экспериментально установил закон, согласно которому восприимчивость парамагнитного вещества равна

$$\chi_{\text{м}} = \frac{C}{T}, \tag{7.52}$$

где C — постоянная Кюри, зависящая от рода вещества, T — теормодинамическая температура.

Классическая теория парамагнетизма была развита Ланжевеном[14]) в 1905 г. Мы ограничимся изложением этой теории для случая не слишком сильных полей и не очень низких температур.

Согласно формуле (6.79) атом обладает в магнитном поле потенциальной энергией $W = -p_{\text{m}} B \cos\vartheta$, которая зависит от угла ϑ между векторами $\mathbf{p}_{\text{m}}$ и **B**. Поэтому равновесное распределение моментов по направлениям должно подчиняться закону Больцмана (см. § 2.8 кн. 3). Согласно этому закону вероятность того, что магнитный момент атома будет образовывать с направлением вектора **B** угол, заключенный в пределах от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$, пропорциональна

$$\exp(-W/kT) = \exp(p_{\text{m}} B \cos\vartheta/kT).$$

Введя обозначение

$$a = p_{\text{m}} B/kT, \tag{7.53}$$

выражение, определяющее вероятность, можно написать в виде

$$\exp(a \cos\vartheta). \tag{7.54}$$

В отсутствие поля все направления магнитных моментов равновероятны. Следовательно, вероятность того, что

[14]) Поль Ланжевен (1872–1946) — французский физик.

направление момента образует с некоторым направлением z угол в пределах от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$, равна

$$(dP_\vartheta)_{B=0} = \frac{d\Omega_\vartheta}{4\pi} = \frac{2\pi \sin\vartheta \, d\vartheta}{4\pi} = \frac{1}{2}\sin\vartheta \, d\vartheta. \qquad (7.55)$$

Здесь $d\Omega_\vartheta = 2\pi \sin\vartheta \, d\vartheta$ — телесный угол, заключенный между конусами с углами раствора ϑ и $\vartheta + d\vartheta$ (рис. 7.16).

При включении поля в выражении вероятности появляется множитель (7.54):

$$dP_\vartheta = A\exp(a\cos\vartheta) \cdot \frac{1}{2}\sin\vartheta \, d\vartheta \qquad (7.56)$$

(A – неизвестный пока коэффициент пропорциональности).

Магнитный момент атома имеет величину порядка одного магнетона Бора, т. е. $\sim 10^{-23}$ Дж/Тл (см. (7.45)). При достигаемых обычно полях магнитная индукция бывает порядка 1 Тл (10^4 Гс). Следовательно, $p_{\mathrm{m}}B$ имеет порядок 10^{-23} Дж. Величина kT при комнатной температуре равна примерно $4 \cdot 10^{-21}$ Дж. Таким образом, $a = (p_{\mathrm{m}}B/kT) \ll 1$ и $\exp(a\cos\vartheta)$ можно заменить приближенно на $1 + a\cos\vartheta$. В этом приближении выражение (7.56) принимает вид

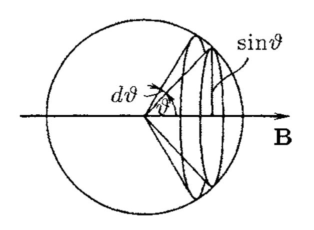


Рис. 7.16

$$dP_\vartheta = A(1 + a\cos\vartheta) \cdot \frac{1}{2}\sin\vartheta \, d\vartheta.$$

Коэффициент A можно найти исходя из того, что сумма вероятностей всех возможных значений угла ϑ должна быть равна единице:

$$1 = \int_0^\pi A(1 + a\cos\vartheta) \cdot \frac{1}{2}\sin\vartheta \, d\vartheta = A.$$

Отсюда $A = 1$, так что

$$dP_\vartheta = \frac{1}{2}(1 + a\cos\vartheta)\sin\vartheta \, d\vartheta.$$

Пусть в единице объема парамагнетика содержится n атомов. Тогда число атомов, магнитные моменты которых

образуют с направлением поля углы от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$, будет равно

$$dn_\vartheta = n\,dP_\vartheta = \frac{1}{2}n(1 + a\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Каждый из этих атомов вносит в результирующий магнитный момент вклад, равный $p_\mathrm{m}\cos\vartheta$. Следовательно, для магнитного момента единицы объема (т. е. для намагниченности) получается выражение

$$J = \int_0^\pi p_\mathrm{m}\cos\vartheta\,dn_\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}np_\mathrm{m}\int_0^\pi (1 + a\cos\vartheta)\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{2}np_\mathrm{m}\frac{2a}{3} = \frac{np_\mathrm{m}a}{3}.$$

Подстановка вместо a его значения (7.53) дает

$$J = \frac{np_\mathrm{m}^2 B}{3kT}.$$

Наконец, разделив J на H и положив $B/H = \mu_0$ (для парамагнетика μ практически равна единице), найдем восприимчивость:

$$\chi = \frac{\mu_0 np_\mathrm{m}^2}{3kT}. \tag{7.57}$$

Заменив n постоянной Авогадро N_A, получим выражение для молярной восприимчивости:

$$\chi_\mathrm{м} = \frac{\mu_0 N_\mathrm{A} p_\mathrm{m}^2}{3kT}. \tag{7.58}$$

Мы пришли к закону Кюри. Сопоставление формул (7.52) и (7.58) дает для постоянной Кюри следующее выражение:

$$C = \frac{\mu_0 N_\mathrm{A} p_\mathrm{m}^2}{3k}. \tag{7.59}$$

Напомним, что формула (7.58) получена в предположении, что $p_\mathrm{m}B \ll kT$. В очень сильных полях и при низких температурах наблюдаются отступления от пропорциональности между намагниченностью парамагнетика J и

напряженностью поля H; в частности, может наступить состояние магнитного насыщения, при котором все $\mathbf{p}_m$ выстраиваются по полю и дальнейшее увеличение H не приводит к возрастанию J.

Значения $\chi_м$, вычисленные по формуле (7.58), в ряде случаев хорошо согласуются со значениями, полученными из опыта.

Квантовая теория парамагнетизма учитывает тот факт, что возможны лишь дискретные ориентации магнитного момента атома относительно поля. Она приводит к выражению для $\chi_м$, аналогичному (7.58).

7.9. Ферромагнетизм

Особый класс магнетиков образуют вещества, способные обладать намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля. По своему наиболее распространенному представителю — железу — они получили название ферромагнетиков. К их числу, кроме железа, принадлежат никель, кобальт, гадолиний, их сплавы и соединения, а также некоторые сплавы и соединения марганца и хрома с неферромагнитными элементами. Ферромагнетизм присущ всем этим веществам только в кристаллическом состоянии.

Ферромагнетики являются сильномагнитными веществами. Их намагниченность в огромное (до 10^{10}) число

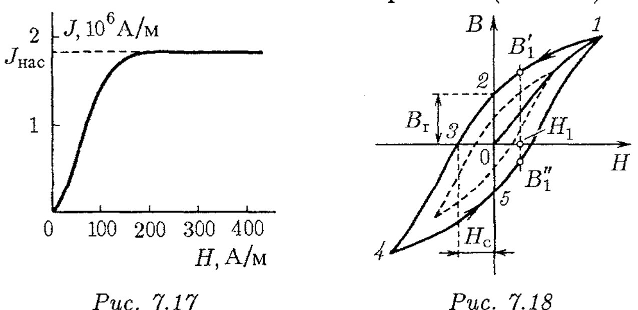


Рис. 7.17 *Рис. 7.18*

раз превосходит намагниченность диа- и парамагнетиков, принадлежащих к категории слабомагнитных веществ.

Намагниченность слабомагнитных веществ изменяется с напряженностью поля линейно. Намагниченность ферромагнетиков зависит от H сложным образом. На рис. 7.17 дана кривая намагничения ферромагнетика,

магнитный момент которого первоначально был равен нулю (она называется основной или нулевой кривой намагничения). Уже в полях порядка нескольких эрстед (~ 100 А/м) намагниченность J достигает насыщения. Основная кривая намагничения на диаграмме $B-H$ приведена на рис. 7.18 (кривая 0–*1*). Напомним, что $B = \mu_0(H + J)$. Поэтому по достижении насыщения B продолжает расти с H по линейному закону: $B = \mu_0 H + \mathrm{const}$, где $\mathrm{const} = \mu_0 J_{\text{нас}}$.

Кривая намагничения железа была впервые получена и подробно исследована Столетовым[15]). Разработанный им баллистический метод измерения магнитной индукции находит широкое применение до настоящего времени (см. § 8.3).

Кроме нелинейной зависимости между H и J (или между H и B), для ферромагнетиков характерно также наличие гистерезиса. Если довести намагничение до насыщения (точка *1* на рис. 7.18) и затем уменьшать напряженность магнитного поля, то индукция B следует не по первоначальной кривой 0–*1*, а изменяется в соответствии с кривой *1–2*. В результате, когда напряженность внешнего поля станет равной нулю (точка *2*), намагничение не исчезает и характеризуется величиной B_r, которая называется остаточной индукцией. Намагниченность имеет при этом значение J_r, называемое остаточной намагниченностью.

Индукция B обращается в нуль лишь под действием поля H_c, имеющего направление, противоположное полю, вызвавшему намагничение. Напряженность H_c называется коэрцитивной силой.

Существование остаточной намагниченности делает возможным изготовление постоянных магнитов, т. е. тел, которые без затраты энергии на поддержание макроскопических токов обладают магнитным моментом и создают в окружающем их пространстве магнитное поле. Постоянный магнит тем лучше сохраняет свои свойства, чем больше коэрцитивная сила материала, из которого он изготовлен.

При действии на ферромагнетик переменного магнитного поля индукция изменяется в соответствии с кривой *1-2-3-4-5-1* (рис. 7.18), которая называется петлей

[15]) Александр Григорьевич Столетов (1839–1896) — русский физик.

гистерезиса (аналогичная петля получается и на диаграмме $J - H$). Если максимальные значения H таковы, что намагниченность достигает насыщения, получается так называемая максимальная петля гистерезиса (сплошная петля на рис. 7.18). Если при амплитудных значениях H насыщение не достигается, получается петля, называемая частным циклом (штриховая петля на рисунке). Частных циклов существует бесконечное множество, все они лежат внутри максимальной петли гистерезиса.

Гистерезис приводит к тому, что намагничение ферромагнетика не является однозначной функцией H; оно в сильной мере зависит от предыстории образца — от того, в каких полях он побывал прежде. Например, в поле напряженности H_1 (рис. 7.18) индукция может иметь любое значение в пределах от B_1' до B_1''.

Из всего сказанного о ферромагнетиках следует, что они очень похожи по своим свойствам на сегнетоэлектрики (см. § 2.9).

В связи с неоднозначностью зависимости B от H понятие магнитной проницаемости применяется лишь к основной кривой намагничения. Магнитная проницаемость ферромагнетиков μ (а следовательно, и магнитная восприимчивость χ) является функцией напряженности поля. На рис. 7.19*а* изображена основная кривая намагничения. Проведем из начала координат прямую линию, проходящую через произвольную точку кривой. Тангенс угла наклона этой прямой пропорционален отношению B/H, т. е. магнитной проницаемости μ для соответствующего значения напряженности поля. При увеличении H от нуля угол наклона (а значит, и μ) сначала растет. В точке *2* он достигает максимума (прямая *0–2* является касательной к кривой), а затем убывает. На рис. 7.19*б* дан график зависимости μ от H. Из рисунка видно, что максимальное значение проницаемости достигается несколько раньше, чем насыщение. При неограниченном возрастании H

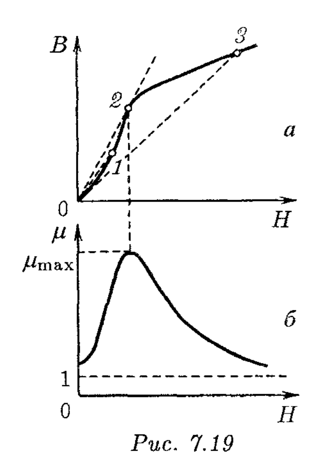


Рис. 7.19

проницаемость асимптотически приближается к единице. Это следует из того, что J в выражении $\mu = 1 + J/H$ не может превысить значения $J_{\text{нас}}$.

Величины B_r (или J_r), H_c и $\mu_{\max}$ являются основными характеристиками ферромагнетика. Если коэрцитивная сила H_c велика, ферромагнетик называется жестким. Для него характерна широкая петля гистерезиса. Ферромагнетик с малой H_c (и соответственно узкой петлей гистерезиса) называется мягким. В зависимости от назначения берутся ферромагнетики с той или иной характеристикой. Так, для постоянных магнитов употребляются жесткие ферромагнетики, а для сердечников трансформаторов — мягкие. В табл. 7.1 приведены характеристики нескольких типичных ферромагнетиков.

Таблица 7.1

Материал	Состав	$\mu_{\max}$	B_c, Тл	H_c, А/м
Железо	99,9% Fe	5 000	—	80
Супермаллой	79% Ni, 5% Mo, 16% Fe	800 000	—	0,3
Алнико	10% Al, 19% Ni, 18% Co, 53% Fe	—	0,9	52 000

Основы теории ферромагнетизма были созданы Френкелем [16]) и В. Гейзенбергом в 1928 г. Из опытов по изучению магнитомеханических явлений (см. § 7.6) следует, что ответственными за магнитные свойства ферромагнетиков являются собственные (спиновые) магнитные моменты электронов. При определенных условиях в кристаллах могут возникать силы [17]), которые заставляют магнитные моменты электронов выстраиваться параллельно друг другу. В результате возникают области спонтанного (самопроизвольного) намагничения, которые называют также доменами. В пределах каждого домена ферромагнетик спонтанно намагничен до насыщения и обладает определенным магнитным моментом. На-

[16]) Яков Ильич Френкель (1894–1952) — советский физик-теоретик.

[17]) Эти силы называются обменными. Их объяснение дается только квантовой механикой.

правление этих моментов для разных доменов различны (рис. 7.20), так что в отсутствие внешнего поля суммарный момент всего тела равен нулю. Домены имеют размеры порядка 1–10 мкм.

Действие поля на домены на разных стадиях процесса намагничения оказывается различным. Вначале, при слабых полях, наблюдается смещение границ доменов, в результате чего происходит увеличение тех доменов, моменты которых составляют с **H** меньший угол, за счет доменов, у которых угол ϑ между векторами $\mathbf{p}_m$ и **H** больше. Например, домены *1* и *3* (рис. 7.20) увеличиваются за счет доменов *2* и *4*. С увеличением напряженности поля этот процесс идет все дальше и дальше, пока домены с меньшими ϑ (которые обладают в магнитном поле меньшей энергией) не поглотят целиком энергетически менее выгодные домены. На следующей стадии имеет место поворот магнитных моментов доменов в направлении поля. При этом моменты электронов в пределах домена поворачиваются одновременно, без нарушения их строгой параллельности друг другу. Эти процессы (исключая небольшие смещения границ между доменами в очень слабых полях) являются необратимыми, что и служит причиной гистерезиса.

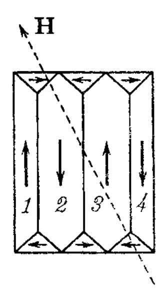


Рис. 7.20

Для каждого ферромагнетика имеется определенная температура T_C, при которой области спонтанного намагничения распадаются и вещество утрачивает ферромагнитные свойства. Эта температура называется **точкой Кюри**. Для железа она равна 768 °С, для никеля 365 °С. При температуре выше точки Кюри ферромагнетик становится обычным парамагнетиком, магнитная восприимчивость которого подчиняется **закону** Кюри–Вейсса[18])

$$\chi_\text{м} = \frac{C}{T - T_C} \qquad (7.60)$$

(ср. с формулой (7.52)). При охлаждении ферромагнетика ниже точки Кюри в нем снова возникают домены.

В некоторых случаях обменные силы приводят к возникновению так называемых антиферромагнетиков (хром,

---

[18]) Пьер Эрнест Вейсс (1865–1940) — французский физик.

марганец и др.). Существование *антиферромагнетиков* было предсказано Неелем[19] (в 1932 г.) и независимо от него Ландау[20] (в 1933 г.). В антиферромагнетиках собственные магнитные моменты электронов самопроизвольно ориентированы антипараллельно друг другу. Такая ориентация охватывает попарно соседние атомы. В результате антиферромагнетики обладают крайне малой магнитной восприимчивостью и ведут себя как очень слабые парамагнетики. Для антиферромагнетиков также существует температура T_N, при которой антипараллельная ориентация спинов исчезает. Эта температура называется *антиферромагнитной точкой Кюри* или *точкой Нееля*. У некоторых антиферромагнетиков (например, у эрбия, диспрозия, сплавов марганца и меди) таких температур две (верхняя и нижняя точки Нееля), причем антиферромагнитные свойства наблюдаются только при промежуточных температурах. Выше верхней точки вещество ведет себя как парамагнетик, а при температурах, меньших нижней точки Нееля, становится ферромагнетиком.

---

[19]) Луи Элен Феликс Неель (р. в 1904 г.) — французский физик.

[20]) Лев Давыдович Ландау (1908–1968) — советский физик-теоретик.

Глава 8

Электромагнитная индукция

8.1. Явление электромагнитной индукции

В 1831 г. Фарадей обнаружил, что в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную этим контуром, возникает электрический ток. Это явление называют электромагнитной индукцией, а возникающий ток — индукционным.

Явление электромагнитной индукции свидетельствует о том, что при изменениях магнитного потока в контуре возникает электродвижущая сила индукции $\mathcal{E}_i$. Величина $\mathcal{E}_i$ не зависит от способа, которым осуществляется изменение магнитного потока Φ, и определяется лишь скоростью изменения Φ, т. е. $d\Phi/dt$. При изменении знака $d\Phi/dt$ направление $\mathcal{E}_i$ также меняется.

Рассмотрим следующий пример. На рис. 8.1 изображен контур *1*, силу тока в котором I_1 можно изменять с помощью реостата. Этот ток создает магнитное поле, пронизывающее контур *2*. Если увеличивать ток I_1, поток магнитной индукции Φ через контур *2* будет расти. Это приведет к появлению в контуре *2* индукционного тока I_2, регистрируемого гальванометром. Уменьшение тока I_1 обусловит убывание магнитного потока через контур *2*, что приведет к появлению в нем индукционного тока иного направления, чем в первом случае. Индукционный ток I_2 можно вызвать также, приближая контур *2* к контуру *1* или, наоборот, удаляя контур *2* от контура *1*. В обоих случаях направления возникающего тока противоположны. Наконец, электромагнитную

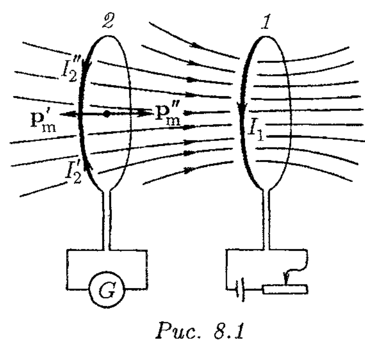


Рис. 8.1

индукцию можно вызвать, не перемещая контур *2* поступательно, а поворачивая его так, чтобы изменялся угол между нормалью к контуру и направлением поля.

Ленц установил правило, позволяющее найти направление индукционного тока. Правило Ленца гласит, что *индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.* Если, например, изменение Φ вызвано перемещением контура *2*, то возникает индукционный ток такого направления, что сила взаимодействия с контуром *1* противится движению контура. При приближении контура *2* к контуру *1* (см. рис. 8.1) возникает ток I_2', магнитный момент которого направлен противоположно полю тока I_1 (угол α между векторами $\mathbf{p}'_\mathrm{m}$ и $\mathbf{B}$ равен π). Следовательно, на контур *2* будет действовать сила, отталкивающая его от контура *1* (см. формулу (6.80)). При удалении контура *2* от контура *1* возникает ток I_2'', момент которого $\mathbf{p}''_\mathrm{m}$ совпадает по направлению с полем тока I_1, $(\alpha = 0)$, так что сила действующая на контур *2*, направлена к контуру *1*.

Пусть оба контура неподвижны и ток в контуре *2* индуцируется путем изменения тока I_1 в контуре *1*. В этом случае возникает ток I_2 такого направления, что создаваемый им собственный магнитный поток стремится ослабить изменения внешнего потока, приведшие к появлению индукционного тока. При увеличении I_1, т. е. возрастании внешнего магнитного потока, направленного вправо, возникает ток I_2', создающий поток, направленный влево. При уменьшении I_1 возникает ток I_2'', собственный магнитный поток которого направлен так же, как и внешний поток, и, следовательно, стремится поддержать внешний поток неизменным.

8.2. Электродвижущая сила индукции

В предыдущем параграфе мы выяснили, что изменения магнитного потока Φ через контур вызывают возникновение в контуре электродвижущей силы индукции $\mathcal{E}_i$. Чтобы найти связь между $\mathcal{E}_i$ и скоростью изменения Φ, рассмотрим следующий пример.

Возьмем контур с подвижной перемычкой длины l (рис. 8.2*а*). Поместим его в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости контура и направленное за чертеж. Приведем перемычку в движение со скоростью $\mathbf{v}$.

С той же скоростью станут перемещаться относительно поля и носителя тока в перемычке — электроны. В результате на каждый электрон начнет действовать направленная вдоль перемычки магнитная сила

$$\mathbf{F}_{\parallel} = -e[\mathbf{vB}] \qquad (8.1)$$

(см. (6.36); заряд электрона равен $-e$). Действие этой силы эквивалентно действию на электрон электрического поля напряженности

$$\mathbf{E} = [\mathbf{vB}].$$

Это поле неэлектростатического происхождения. Его циркуляция по контуру дает величину ЭДС, индуцируемой в контуре:

$$\mathcal{E}_i = \oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \oint [\mathbf{vB}]\,d\mathbf{l} = \int\limits_1^2 [\mathbf{vB}]\,d\mathbf{l} \qquad (8.2)$$

(подынтегральная функция отлична от нуля лишь на образуемом перемычкой участке *1–2*).

Чтобы по знаку $\mathcal{E}_i$ можно было судить о направлении, в котором действует ЭДС, будем считать $\mathcal{E}_i$ положительной

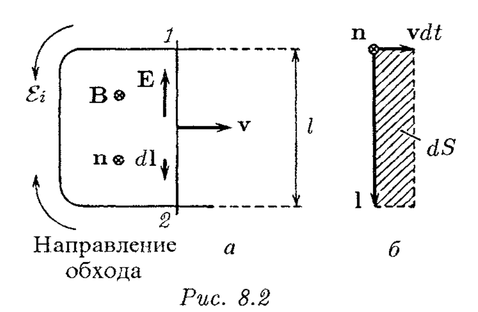


Рис. 8.2

в том случае, когда ее направление образует с направлением нормали к контуру правовинтовую систему.

Выберем нормаль так, как показано на рис. 8.2. Тогда при вычислении циркуляции нужно обходить контур по часовой стрелке и соответственно выбирать направление векторов $d\mathbf{l}$. Если вынести в (8.2) постоянный вектор $[\mathbf{vB}]$ за знак интеграла, получим

$$\mathcal{E}_i = [\mathbf{vB}] \int\limits_1^2 d\mathbf{l} = [\mathbf{vB}]\mathbf{l},$$

где $\mathbf{l}$ — вектор, показанный на рис. 8.2 *б*. Осуществим в полученном выражении циклическую перестановку сомножителей, после чего умножим и разделим его на dt:

$$\mathcal{E}_i = \mathbf{B}[\mathbf{l}\mathbf{v}] = \frac{\mathbf{B}[\mathbf{l}, \mathbf{v}\,dt]}{dt}. \tag{8.3}$$

Из рис. 8.2 *б* видно, что

$$[\mathbf{l}, \mathbf{v}\,dt] = -\mathbf{n}\,dS,$$

где dS — приращение площади контура за время dt. По определению потока выражение $\mathbf{B}\,d\mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{n}\,dS$ представляет собой поток через площадку dS, т. е. приращение потока $d\Phi$ через контур. Таким образом,

$$\mathbf{B}[\mathbf{l}, \mathbf{v}\,dt] = -\mathbf{B}\mathbf{n}\,dS = -d\Phi.$$

С учетом этого выражению (8.3) можно придать вид

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{8.4}$$

Мы получили, что $d\Phi/dt$ и $\mathcal{E}_i$ имеют противоположные знаки. Знак потока и знак $\mathcal{E}_i$ связаны с выбором направления нормали к плоскости контура. При сделанном нами выборе нормали (см. рис. 8.2) знак $d\Phi/dt$ положительный, а знак $\mathcal{E}_i$ отрицательный. Если бы мы выбрали нормаль, направленную не за чертеж, а на нас, знак $d\Phi/dt$ был бы отрицательным, а знак $\mathcal{E}_i$ — положительным.

Единицей потока магнитной индукции в СИ служит в е б е р [1]) (Вб), который представляет собой поток через поверхность в 1 м^2, пересекаемую нормальными к ней линиями магнитного поля с B, равной 1 Тл. При скорости изменения потока, равной 1 Вб/с, в контуре индуцируется ЭДС, равная 1 В.

В гауссовой системе формула (8.4) имеет вид

$$\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}. \tag{8.5}$$

Единицей Φ в этой системе является м а к с в е л л (Мкс), равный потоку через поверхность в 1 см^2 при $B = 1$ Гс. Формула (8.5) дает $\mathcal{E}_i$ в СГСЭ-единицах потенциала. Чтобы

---

[1]) Вильгельм Эдуард Вебер (1804–1891) — немецкий ученый.

получить $\mathcal{E}_i$ в вольтах, нужно умножить полученный результат на 300. Поскольку $300/c = 10^{-8}$,

$$\mathcal{E}_i(\text{В}) = -10^{-8}\frac{d\Phi}{dt}\frac{(\text{Мкс})}{(\text{с})}. \qquad (8.6)$$

В рассуждениях, которые привели нас к формуле (8.4), роль сторонних сил, поддерживающих ток в контуре, играют магнитные силы. Работа этих сил над единичным положительным зарядом, равная по определению ЭДС, оказывается отличной от нуля. Это обстоятельство находится в кажущемся противоречии с высказанным в § 6.5 утверждением о том, что магнитная сила работы над зарядом совершать не может. Противоречие устраняется, если учесть, что сила (8.1) представляет собой не полную магнитную силу, действующую на электрон, а лишь параллельную проводу составляющую этой силы, обусловленную скоростью **v** (см. силу $\mathbf{F}_{||}$ на рис. 8.3). Под действием этой составляющей электрон приходит в движение вдоль провода со скоростью **u**, в результате чего возникает перпендикулярная к проводу составляющая магнитной силы

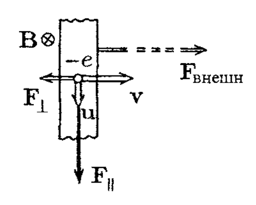


Рис. 8.3

$$\mathbf{F}_{\perp} = -e[\mathbf{uB}]$$

(эта составляющая не вносит вклада в циркуляцию, так как перпендикулярна к $d\mathbf{l}$).

Полная магнитная сила, действующая на электрон, равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{||} + \mathbf{F}_{\perp},$$

а работа этой силы над электроном за время dt составляет

$$dA = \mathbf{F}_{||}\mathbf{u}\,dt + \mathbf{F}_{\perp}\mathbf{v}\,dt = F_{||}u\,dt - F_{\perp}v\,dt$$

(направления векторов $\mathbf{F}_{||}$ и **u** одинаковы, а векторов $\mathbf{F}_{\perp}$ и **v** противоположны; см. рис. 8.3). Подставив значения модулей сил: $F_{||} = evB$ и $F_{\perp} = euB$, получим, что работа полной магнитной силы равна нулю.

Сила $\mathbf{F}_{\perp}$ направлена противоположно скорости перемычки **v**. Поэтому, для того чтобы перемычка перемещалась с постоянной скоростью **v**, к ней нужно приложить внешнюю силу $\mathbf{F}_{\text{внеш}}$, уравновешивающую сумму сил $\mathbf{F}_{\perp}$,

приложенных ко всем электронам, содержащимся в перемычке. За счет работы этой силы и будет возникать энергия, выделяемая в контуре индуцированным током.

Рассмотренное нами объяснение возникновения ЭДС индукции относится к случаю, когда магнитное поле постоянно, а изменяется геометрия контура. Однако магнитный поток через контур может изменяться также за счет изменения **B**. В этом случае объяснение возникновения ЭДС оказывается в принципе другим. Изменяющееся со временем магнитное поле порождает вихревое электрическое поле **E** (подробнее об этом говорится в § 9.1). Под действием поля **E** носители тока в проводнике приходят в движение — возникает индуцированный ток. Связь между ЭДС индукции и изменениями магнитного потока и в этом случае описывается формулой (8.4).

Пусть контур, в котором индуцируется ЭДС, состоит не из одного витка, а из N витков, например представляет собой соленоид. Поскольку витки соединяются последовательно, $\mathcal{E}_i$ будет равна сумме ЭДС, индуцируемых в каждом из витков в отдельности:

$$\mathcal{E}_i = -\sum \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\sum \Phi\right).$$

Величину

$$\Psi = \sum \Phi \qquad (8.7)$$

называют *потокосцеплением* или *полным магнитным потоком*. Ее измеряют в тех же единицах, что и Φ. Если поток, пронизывающий каждый из витков, одинаков, то

$$\Psi = N\Phi. \qquad (8.8)$$

ЭДС, индуцируемая в сложном контуре, определяется формулой

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt}. \qquad (8.9)$$

8.3. Методы измерения магнитной индукции

Пусть полный магнитный поток, сцепленный с некоторым контуром, изменяется от значения Ψ_1 до Ψ_2. Найдем заряд q, который протекает при этом через каждое сечение контура. Мгновенное значение силы тока в контуре равно

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Psi}{dt}.$$

Отсюда

$$dq = I\,dt = -\frac{1}{R}\frac{d\Psi}{dt}dt = -\frac{1}{R}d\Psi.$$

Проинтегрировав это выражение, найдем полный заряд:

$$q = \int dq = -\frac{1}{R}\int\limits_1^2 d\Psi = \frac{1}{R}(\Psi_1 - \Psi_2). \qquad (8.10)$$

Соотношение (8.10) лежит в основе разработанного А. Г. Столетовым баллистического способа измерения магнитной индукции, который заключается в следующем. В исследуемое поле помещают небольшую катушку, имеющую N витков. Катушку располагают так, чтобы вектор **B** оказался перпендикулярным к плоскости витков (рис. 8.4*а*).

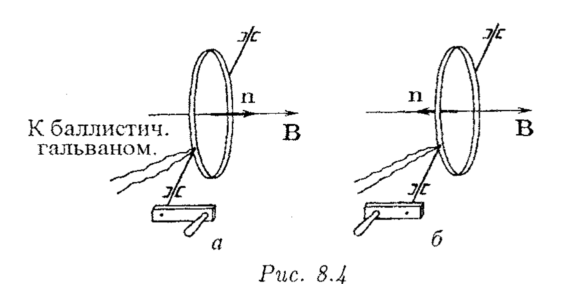


Рис. 8.4

Тогда полный магнитный поток, сцепленный с катушкой, будет равен

$$\Psi_1 = NBS,$$

где S — площадь одного витка, которая должна быть настолько малой, чтобы поле в ее пределах можно было считать однородным.

При повороте катушки на 180° (рис. 8.4*б*) потокосцепление становится равным $\Psi_2 = -NBS$ (**n** и **B** направлены в противоположные стороны). Следовательно, изменение полного потока при повороте катушки равно $\Psi_1 - \Psi_2 = 2NBS$. Если поворот катушки осуществить достаточно быстро, в контуре возникает импульс тока, при котором протекает заряд (см. формулу (8.10))

$$q = \frac{1}{R}2NBS. \qquad (8.11)$$

Заряд, протекающий по цепи при кратковременном импульсе тока, можно измерить с помощью так называемого баллистического гальванометра, который представляет собой гальванометр с большим периодом собственных колебаний. Измерив q и зная R, N и S, можно по формуле (8.11) найти B. Под R в этом случае подразумевается полное сопротивление цепи, включающее сопротивление катушки, соединительных проводов и гальванометра.

Вместо того чтобы поворачивать катушку, можно включать (либо выключать) исследуемое магнитное поле или изменять его направление на обратное.

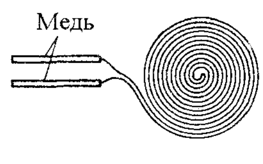


Рис. 8.5

Для измерения B используют также то обстоятельство, что электрическое сопротивление висмута сильно возрастает под действием магнитного поля — примерно на 5 % на каждую десятую долю тесла (на каждую тысячу гауссов). Поэтому, помещая предварительно проградуированную висмутовую спираль (рис. 8.5) в магнитное поле и измеряя относительное изменение ее сопротивления, можно определить магнитную индукцию поля.

Отметим, что у других металлов электрическое сопротивление также возрастает в магнитном поле, но в гораздо меньшей степени. У меди, например, увеличение сопротивления примерно в 10^4 раз меньше, чем у висмута.

8.4. Токи Фуко

Индукционные токи могут возбуждаться и в сплошных массивных проводниках. В этом случае их называют **токами Фуко** или **вихревыми токами**. Электрическое сопротивление массивного проводника мало, поэтому токи Фуко могут достигать очень большой силы.

В соответствии с правилом Ленца токи Фуко выбирают внутри проводника такие пути и направления, чтобы своим действием возможно сильнее противиться причине, которая их вызывает. Поэтому движущиеся в сильном магнитном поле хорошие проводники испытывают сильное торможение, обусловленное взаимодействием токов Фуко с магнитным полем. Этим пользуются для демпфирования (успокоения) подвижных частей гальванометров, сейсмографов и других приборов. На подвижной части

прибора укрепляется проводящая (например, алюминиевая) пластинка в виде сектора (рис. 8.6), которая вводится в зазор между полюсами сильного постоянного магнита. При движении пластинки в ней возникают токи Фуко, вызывающие торможение системы.

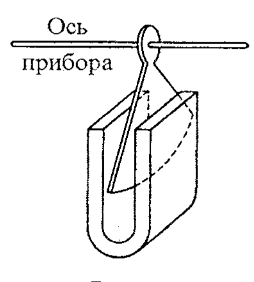


Рис. 8.6

Преимущество такого устройства состоит в том, что торможение возникает лишь при движении пластинки и исчезает, когда пластинка неподвижна. Поэтому электромагнитный успокоитель совершенно не препятствует точному приходу системы в положение равновесия.

Тепловое действие токов Фуко используется в индукционных печах. Такая печь представляет собой катушку, питаемую высокочастотным током большой силы. Если поместить внутрь катушки проводящее тело, в нем возникнут интенсивные вихревые токи, которые могут разогреть тело до плавления. Таким способом осуществляют плавление металлов в вакууме, что позволяет получать материалы исключительно высокой чистоты.

С помощью токов Фуко осуществляется также прогрев внутренних металлических частей вакуумных установок для их обезгаживания.

Во многих случаях токи Фуко бывают нежелательными, и приходится принимать для борьбы с ними специальные меры. Так, например, чтобы предотвратить потери энергии на нагревание токами Фуко сердечников трансформаторов, эти сердечники набирают из тонких пластин, разделенных изолирующими прослойками. Пластины располагаются так, чтобы возможные направления токов Фуко были к ним перпендикулярными. Появление ферритов (полупроводниковых магнитных материалов с большим электрическим сопротивлением) сделало возможных изготовление сердечников сплошными.

Токи Фуко, возникающие в проводах, по которым текут переменные токи, направлены так, что ослабляют ток внутри провода и усиливают вблизи поверхности. В результате быстропеременный ток оказывается распределенным по сечению провода неравномерно — он как бы вытесняется на поверхность проводника. Это явление называется с к и н - э ф ф е к т о м (от английского skin —

кожа) или поверхностным эффектом. Из-за скин-эффекта внутренняя часть проводников в высокочастотных цепях оказывается бесполезной. Поэтому в высокочастотных цепях применяют проводники в виде трубок.

8.5. Явление самоиндукции

Электрических ток, текущий в любом контуре, создает пронизывающий этот контур магнитный поток Ψ. При изменениях I изменяется также и Ψ, вследствие чего в контуре индуцируется э. д. с. Это явление называется самоиндукцией.

В соответствии с законом Био–Савара магнитная индукция B пропорциональна силе тока, вызвавшего поле. Отсюда вытекает, что ток I в контуре и создаваемый им полный магнитный поток Ψ через контур пропорциональны друг другу:

$$\Psi = LI. \tag{8.12}$$

Коэффициент пропорциональности L между силой тока и полным магнитным потоком называется индуктивностью контура.

Линейная зависимость Ψ от I наблюдается только в том случае, если магнитная проницаемость μ среды, которой окружен контур, не зависит от напряженности поля H, т. е. в отсутствие ферромагнетиков. В противном случае μ является сложной функцией от I (через H; см. рис. 7.19*б*), и, поскольку $B = \mu_0\mu H$, зависимость Ψ от I также будет довольно сложной. Однако соотношение (8.12) распространяют и на этот случай, считая индуктивность L функцией от I. При неизменной силе тока I полный поток Ψ может изменяться за счет изменений формы и размеров контура.

Из сказанного следует, что индуктивность L зависит от геометрии контура (т. е. его формы и размеров), а также от магнитных свойств (от μ) окружающей контур среды. Если контур жесткий и поблизости от него нет ферромагнетиков, индуктивность L является постоянной величиной.

За единицу индуктивности в СИ принимается индуктивность такого проводника, у которого при силе тока в нем 1 А возникает сцепленный с ним полный поток Ψ, равный 1 Вб. Эту единицу называют генри (Гн)[2]).

---

[2]) В честь американского физика Джозефа Генри (1797–1878).

В гауссовой системе индуктивность имеет размерность длины. В соответствии с этим единицу индуктивности в этой системе называют с а н т и м е т р о м. Индуктивностью в 1 см обладает такой контур, с которым при силе тока 1 СГСМ-единица (т. е. 10 А) сцеплен поток, равный 1 Мкс (10^{-8} Вб).

Вычислим индуктивность соленоида. Возьмем соленоид такой длины, чтобы его можно было практически считать бесконечным. При протекании по нему тока I внутри соленоида возбуждается однородное поле, индукция которого равна $B = \mu_0\mu nI$ (см. формулы (6.111) и (7.26)). Поток через каждый из витков равен $\Phi = BS$, а полный магнитный поток, сцепленный с соленоидом, составляет

$$\Psi = N\Phi = nlBS = \mu_0\mu n^2 lSI, \tag{8.13}$$

где l — длина соленоида (которая предполагается очень большой), S — площадь поперечного сечения, n — число витков на единицу длины (произведение nl дает полное число витков N).

Сопоставление формул (8.12) и (8.13) дает для индуктивности очень длинного соленоида выражение

$$L = \mu_0\mu n^2 lS = \mu_0\mu n^2 V, \tag{8.14}$$

где $V = lS$ — объем соленоида.

Из (8.14) следует, что размерность μ_0 равна размерности индуктивности, деленной на размерность длины. В соответствии с этим μ_0 измеряется в генри на метр (см. (6.3)).

При изменениях силы тока в контуре возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_s$, равная

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right). \tag{8.15}$$

Если при изменениях силы тока индуктивность остается постоянной (что возможно лишь при отсутствии ферромагнетиков), выражение для ЭДС самоиндукции имеет вид

$$\mathcal{E}_s = -\frac{L\,dI}{dt}. \tag{8.16}$$

Знак минус в этой формуле обусловлен правилом Ленца, согласно которому индукционный ток бывает направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей. В рассматриваемом случае причиной, вызывающей $\mathcal{E}_s$,

является изменение силы тока в цепи. Примем в качестве положительного направление обхода по часовой стрелке. При этом условии сила тока будет положительной, если ток течет в цепи по часовой стрелке, и отрицательной, если ток течет против часовой стрелки. Аналогично $\mathcal{E}_s$ будет положительной, если она действует в направлении по часовой стрелке, и отрицательной, если она действует в направлении против часовой стрелки.

Производная dI/dt положительна в двух случаях: либо при возрастании положительного тока, либо при убывании по модулю отрицательного тока. Из (8.16) следует, что в этих случаях $\mathcal{E}_s < 0$. Это означает, что ЭДС самоиндукции направлена против часовой стрелки и, следовательно, противится указанным изменениям тока (нарастанию положительного либо убыванию отрицательного тока).

Производная dI/dt отрицательна также в двух случаях: либо при убывании положительного тока, либо при увеличении по модулю отрицательного тока. В этих случаях $\mathcal{E}_s > 0$ и, следовательно, противится изменениям тока (убыванию положительного либо возрастанию по модулю отрицательного тока).

Соотношение (8.16) дает возможность определить индуктивность как коэффициент пропорциональности между скоростью изменения силы тока в контуре и возникающей вследствие этого ЭДС самоиндукции. Однако такое определение правомерно лишь в случае, когда $L = \text{const}$. В присутствии ферромагнетиков L недеформируемого контура будет функцией от I (через H); следовательно, dL/dt можно записать как $(dL/dI)\ (dI/dt)$. Произведя такую подстановку в формуле (8.15), получим

$$\mathcal{E}_s = -\left(L + I\frac{dL}{dI}\right)\frac{dI}{dt}. \qquad (8.17)$$

Отсюда видно, что при наличии ферромагнетиков коэффициент пропорциональности между dI/dt и $\mathcal{E}_s$ отнюдь не равен L.

8.6. Ток при замыкании и размыкании цепи

По правилу Ленца дополнительные токи, возникающие вследствие самоиндукции, всегда направлены так, чтобы противодействовать изменениям тока в цепи. Это приводит к тому, что установление тока при замыкании цепи и

убывание тока при размыкании цепи происходят не мгновенно, а постепенно.

Найдем сначала характер изменения тока при размыкании цепи. Пусть в цепь с не зависящей от I индуктивностью L и сопротивлением R включен источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$ (рис. 8.7). В цепи будет течь постоянный ток

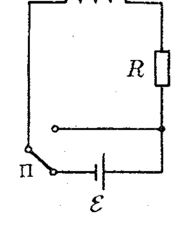


Рис. 8.7

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R} \tag{8.18}$$

(сопротивление источника тока считаем пренебрежимо малым). В момент времени $t = 0$ отключим источник тока, замкнув одновременно цепь накоротко переключателем П. Как только сила тока в цепи начнет убывать, возникнет ЭДС самоиндукции, противодействующая этому убыванию. Сила тока в цепи будет удовлетворять уравнению

$$IR = \mathcal{E}_s = -L\frac{dI}{dt},$$

или

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0. \tag{8.19}$$

Уравнение (8.19) представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Разделив переменные, получим

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt.$$

Отсюда

$$\ln I = -\frac{R}{L}t + \ln\mathrm{const}$$

(имея в виду дальнейшие преобразования, мы постоянную интегрирования написали в виде $\ln\mathrm{const}$). Потенцирование этого соотношения дает

$$I = \mathrm{const}\cdot\exp\left(-\frac{R}{L}t\right). \tag{8.20}$$

Выражение (8.20) является общим решением уравнения (8.19). Значение const найдем из начальных условий. При $t = 0$ сила тока имела значение (8.18). Следовательно,

const $= I_0$. Подставив это значение в (8.20), придем к выражению

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right). \qquad (8.21)$$

Итак, после отключения источника ЭДС сила тока в цепи не обращается мгновенно в нуль, а убывает по экспоненциальному закону (8.21). График убывания I дан на рис. 8.8 (кривая *1*). Скорость убывания определяется имеющей размерность времени величиной

$$\tau = \frac{L}{R}, \qquad (8.22)$$

которую называют постоянной времени цепи. Заменив в (8.21) R/L на $1/\tau$, получим

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \qquad (8.23)$$

В соответствии с этой формулой τ есть время, в течение которого сила тока уменьшается в e раз. Из (8.22) видно, что чем больше индуктивность цепи L и меньше ее сопротивление R, тем больше постоянная времени τ и тем медленнее спадает ток в цепи.

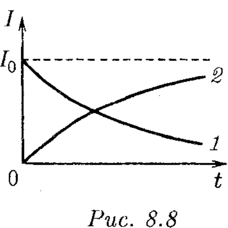


Рис. 8.8

Для упрощения расчетов мы считали, что цепь в момент отключения источника тока замыкается накоротко. Если просто разорвать цепь с большой индуктивностью, возникающее высокое индуцированное напряжение создает искру или дугу в месте разрыва.

Теперь рассмотрим случай замыкания цепи. После подключения источника ЭДС, до тех пор пока сила тока не достигнет установившегося значения (8.18), в цепи, кроме ЭДС $\mathcal{E}$, будет действовать ЭДС самоиндукции. Следовательно, в соответствии с законом Ома

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s = \mathcal{E} - L\frac{dI}{dt},$$

или

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\mathcal{E}}{L}. \qquad (8.24)$$

Мы пришли к линейному неоднородному дифференциальному уравнению, которое отличается от уравнения

(8.19) лишь тем, что в правой части вместо нуля в нем стоит постоянная величина $\mathcal{E}/L$. Из теории дифференциальных уравнений известно, что общее решение линейного неоднородного уравнения можно получить, прибавив любое его частное решение к общему решению соответствующего однородного уравнения (см. § 8.12 кн. 1). Общее решение однородного уравнения имеет вид (8.20). Легко убедиться в том, что $I = \mathcal{E}/R = I_0$ является частным решением уравнения (8.24). Следовательно, общим решением уравнения (8.24) будет функция

$$I = I_0 + \mathrm{const} \cdot \exp\left(-\frac{R}{L}t\right).$$

В начальный момент сила тока I равна нулю. Отсюда $\mathrm{const} = -I_0$. Таким образом,

$$I = I_0\left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right]. \tag{8.25}$$

Эта функция описывает нарастание тока в цепи после подключения к ней источника ЭДС. График функции (8.25) дан на рис. 8.8 (кривая *2*).

8.7. Взаимная индукция

Возьмем два контура *1* и *2*, расположенных близко друг к другу (рис. 8.9). Если в контуре *1* течет ток силы I_1, он создает через контур *2* пропорциональный I_1 полный магнитный поток

$$\Psi_2 = L_{21}I_1 \tag{8.26}$$

(поле, создающее этот поток, изображено на рисунке сплошными линиями). При изменениях тока I_1 в контуре *2* индуцируется ЭДС

$$\mathcal{E}_{i2} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt} \tag{8.27}$$

(мы предполагаем, что ферромагнетиков вблизи контура нет).

Аналогично при протекании в контуре *2* тока силы I_2 возникает сцепленный с контуром *1* поток

$$\Psi_1 = L_{12}I_2 \tag{8.28}$$

(поле, создающее этот поток, изображено штриховыми линиями). При изменениях тока I_2 в контуре *1* индуцируется ЭДС

$$\mathcal{E}_{i1} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}. \qquad (8.29)$$

Контуры *1* и *2* называются связанными, а явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменениях силы тока в другом называется взаимной индукцией.

Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} называются взаимной индуктивностью контуров. Соответствующий расчет показывает, что в отсутствие ферромагнетиков эти коэффициенты всегда равны друг другу:

$$L_{12} = L_{21}. \qquad (8.30)$$

Их значение зависит от формы, размеров и взаимного расположения контуров, а также от магнитной проницаемости окружающей контуры среды. Измеряется L_{12} в тех же единицах, что и индуктивность L.

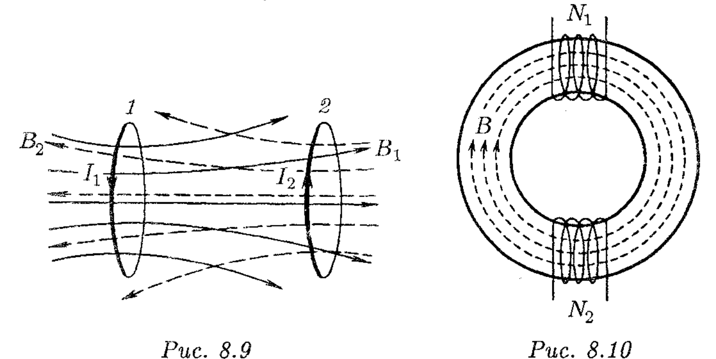


Рис. 8.9 Рис. 8.10

Найдем взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный железный сердечник (рис. 8.10). Линии магнитной индукции сосредоточиваются внутри сердечника (см. текст, следующий за формулой (7.37)), поэтому можно считать, что возбуждаемое любой из обмоток магнитное поле будет иметь всюду в сердечнике одинаковую напряженность. Если первая обмотка имеет N_1 витков и по ней течет ток силы I_1, то согласно теореме о циркуляции (см. (7.11))

$$Hl = N_1 I_1 \qquad (8.31)$$

(l — длина сердечника).

Магнитный поток через поперечное сечение сердечника равен $\Phi = BS = \mu_0 \mu HS$, где S — площадь поперечного сечения сердечника. Подставив сюда значение H из (8.31) и умножив получившееся выражение на N_2, получим полный поток, сцепленный со второй обмоткой:

$$\Psi_2 = \frac{S}{l}\mu_0 \mu N_1 N_2 I_1.$$

Сопоставление этого выражения с формулой (8.26) дает

$$L_{21} = \frac{S}{l}\mu_0 \mu N_1 N_2. \tag{8.32}$$

Вычисление потока Ψ_1, сцепленного с первой обмоткой в том случае, когда по второй обмотке течет ток силы I_2, приводит к выражению

$$L_{12} = \frac{S}{l}\mu_0 \mu N_1 N_2, \tag{8.33}$$

по форме совпадающему с L_{21} (см. (8.32)). Однако в данном случае нельзя утверждать, что $L_{12} = L_{21}$. Множитель μ, входящий в выражения для этих коэффициентов, зависит от напряженности поля H в сердечнике. Если $N_1 \neq N_2$, один и тот же ток, пропускаемый один раз по первой, а другой раз по второй обмотке, создаст в сердечнике поле различной напряженности H. Соответственно значения μ в обоих случаях будут различными, так что при $I_1 = I_2$ числовые значения L_{12} и L_{21} не совпадают.

8.8. Энергия магнитного поля

Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 8.11. При замкнутом ключе в соленоиде установится ток I, который обусловит магнитное поле, сцепленное с витками соленоида. Если разомкнуть ключ, то через сопротивление R будет некоторое время течь постепенно убывающий ток, поддерживаемый возникающей в соленоиде ЭДС самоиндукции. Работа, совершаемая этим током за время dt, равна

$$dA = \mathcal{E}_s I\,dt = -\frac{d\Psi}{dt} I dt = -I\,d\Psi. \tag{8.34}$$

Если индуктивность соленоида не зависит от I ($L = \text{const}$), то $d\Psi = L\,dI$ и выражение (8.34) принимает вид

$$dA = -LI\,dI. \tag{8.35}$$

Проинтегрировав это выражение по I в пределах от первоначального значения I до нуля, получим работу, совершаемую в цепи за все время, в течение которого происходит исчезновение магнитного поля:

$$A = -\int_I^0 LI\,dI = \frac{LI^2}{2}. \qquad (8.36)$$

Работа (8.36) идет на приращение внутренней энергии сопротивления R, соленоида и соединительных проводов (т. е. на их нагревание). Совершение этой работы сопровождается исчезновением магнитного поля, которое первоначально существовало в окружающем соленоид пространстве. Поскольку никаких других изменений в окружающих электрическую цепь телах не происходит, остается заключить, что магнитное поле является носителем энергии, за счет которой и совершается работа (8.36). Таким образом, мы приходим к выводу, что проводник с индуктивностью L, по которому течет ток силы I, обладает энергией

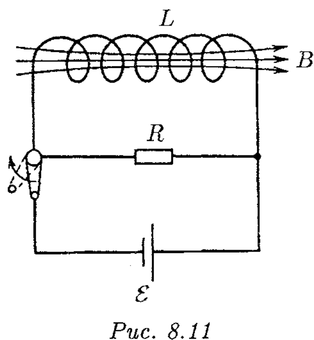


Рис. 8.11

$$W = \frac{LI^2}{2}, \qquad (8.37)$$

которая локализована в возбуждаемом током магнитном поле (ср. эту формулу с выражением $CU^2/2$ для энергии заряженного конденсатора; см. (4.5)).

Выражение (8.36) можно трактовать как работу, которую необходимо совершить против ЭДС самоиндукции в процессе нарастания тока от нуля до I и которая идет на создание магнитного поля, обладающего энергией (8.37). Действительно, работа, совершаемая против ЭДС самоиндукции, равна

$$A' = \int_0^I (-\mathcal{E}_s) I\,dt.$$

Проделав преобразования, подобные тем, которые привели нас к выражению (8.35), получим

$$A' = \int\limits_0^I LI\,dI = \frac{LI^2}{2}, \qquad (8.38)$$

что совпадает с (8.36). Работа (8.38) совершается при установлении тока за счет источника ЭДС и идет целиком на создание магнитного поля, сцепленного с витками соленоида. Выражение (8.38) не учитывает той работы, которую источник ЭДС затрачивает в процессе установления тока на нагревание проводников.

Выразим энергию магнитного поля (8.37) через величины, характеризующие само поле. В случае очень длинного (практически бесконечного) соленоида

$$L = \mu_0\mu n^2 V; \quad H = nI, \quad \text{или} \quad I = \frac{H}{n}$$

(см. формулы (8.14) и (7.29)). Подставив эти значения L и I в выражение (8.37) и произведя преобразования, получим

$$W = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} V. \qquad (8.39)$$

В § 6.12 было показано, что магнитное поле бесконечно длинного соленоида однородно и отлично от нуля только внутри соленоида. Следовательно, энергия (8.39) локализована внутри соленоида и распределена по его объему с постоянной плотностью w, которую можно найти, разделив W на V. Произведя это деление, получим

$$w = \frac{\mu_0\mu H^2}{2}. \qquad (8.40)$$

Воспользовавшись соотношением (7.17), формуле для плотности энергии магнитного поля можно придать вид

$$w = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{HB}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}. \qquad (8.41)$$

Полученные нами выражения для плотности энергии магнитного поля отличаются от выражений (4.11) для плотности энергии электрического поля лишь тем, что электрические величины в них заменены соответствующими магнитными.

Зная плотность энергии поля в каждой точке, можно найти энергию поля, заключенную в любом объеме V. Для этого нужно вычислить интеграл

$$W = \int_V w\,dV = \int_V \frac{\mu_0\mu H^2}{2}\,dV. \qquad (8.42)$$

Можно показать, что в случае связанных контуров (в отсутствие ферромагнетиков) энергия поля определяется формулой

$$W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + \frac{L_{12} I_1 I_2}{2} + \frac{L_{21} I_2 I_1}{2}. \qquad (8.43)$$

Для энергии N связанных друг с другом контуров получается аналогичное выражение

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{N} L_{ik} I_i I_k, \qquad (8.44)$$

где $L_{ik} = L_{ki}$ — взаимная индуктивность i-го и k-го контуров, а $L_{ii} = L_i$ — индуктивность i-го контура.

8.9. Работа перемагничивания ферромагнетика

Изменения тока в цепи сопровождаются совершением против ЭДС самоиндукции работы

$$dA' = (-\mathcal{E}_s)I\,dt = \frac{d\Psi}{dt}I dt = I\,d\Psi. \qquad (8.45)$$

Если индуктивность цепи L остается постоянной (что возможно только в отсутствие ферромагнетиков), эта работа полностью идет на создание энергии магнитного поля: $dA' = dW$. Иначе, как мы сейчас выясним, обстоит дело при наличии ферромагнетиков.

В случае очень длинного («бесконечного») соленоида $H = nI$, $\Psi = nlBS$. Соответственно $I = H/n$, $d\Psi = nlS\,dB$. Подставив эти выражения в (8.45), получим

$$dA' = HdB \cdot V, \qquad (8.46)$$

где $V = lS$ — объем соленоида, т. е. объем, в котором создано однородное магнитное поле.

Выясним, можно ли отождествить выражение (8.46) с приращением энергии магнитного поля. Напомним, что

энергия — функция состояния. Поэтому сумма ее приращений для кругового процесса равна нулю:

$$\oint dW = 0.$$

Если заполнить соленоид ферромагнетиком, то связь между B и H изображается кривой, показанной на рис 8.12 Выражение $H\,dB$ дает площадь заштрихованной полоски. Следовательно, интеграл $\oint H\,dB$, вычисленный вдоль петли гистерезиса, равен площади $S_п$ охватываемой петлей. Таким образом, интеграл от выражения (8.46), т. е. $\oint dA'$, отличен от нуля. Отсюда вытекает, что при наличии ферромагнетиков работа (8.46) не может быть приравнена приращению энергии магнитного поля. По завершении цикла перемагничивания H и B, а значит, и магнитная энергия будут иметь первоначальные значения. Следовательно, работа $\oint dA'$ идет не на создание энергии магнитного поля. Как показывает опыт, она идет на увеличение внутренней энергии ферромагнетика, т. е. на его нагревание. Итак, при совершении одного цикла перемагничивания ферромагнетика затрачивается в расчете на единицу объема работа, численно равная площади петли гистерезиса:

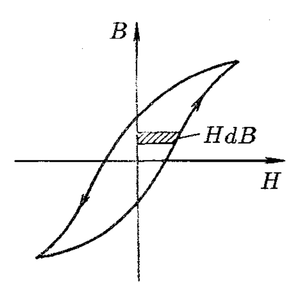


Рис. 8.12

$$A'_{ед.об} = \oint H\,dB = S_п. \qquad (8.47)$$

Эта работа идет на нагревание ферромагнетика.

В отсутствие ферромагнетиков B является однозначной функцией H ($B = \mu_0\mu H$, где $\mu = \text{const}$). Поэтому выражение $H\,dB = \mu_0\mu H\,dH$ представляет собой полный дифференциал

$$dw = H\,dB, \qquad (8.48)$$

определяющий приращение энергии магнитного поля. Интегрирование выражения (8.48) в пределах от нуля до H приводит к формуле (8.40) для плотности энергии поля (прежде чем осуществлять интегрирование, нужно преобразовать $H\,dB$, заменив dB на $\mu_0\mu\,dH$).

Глава 9

Уравнения Максвелла

9.1. Вихревое электрическое поле

Рассмотрим случай электромагнитной индукции, когда проволочный контур, в котором индуцируется ток, неподвижен, а изменения магнитного потока обусловлены изменениями магнитного поля. Возникновение индукционного тока свидетельствует о том, что изменение магнитного поля вызывает появление в контуре сторонних сил, действующих на носители тока. Эти сторонние силы не связаны ни с химическими, ни с тепловыми процессами в проводе; они также не могут быть магнитными силами, потому что такие силы работы над зарядами не совершают. Остается заключить, что индукционный ток обусловлен возникающим в проводе электрическим полем. Обозначим напряженность этого поля $\mathbf{E}_B$ (это обозначение, равно как и применяемое в дальнейшем обозначение $\mathbf{E}_q$, является вспомогательным; впоследствии индексы B и q мы опустим). Электродвижущая сила равна циркуляции вектора $\mathbf{E}_B$ по данному контуру:

$$\mathcal{E}_i = \oint \mathbf{E}_B \, d\mathbf{l}. \tag{9.1}$$

Подстановка в формулу $\mathcal{E}_i = -d\Phi/dt$ выражения (9.1) для $\mathcal{E}_i$ и выражения $\int \mathbf{B}\, d\mathbf{S}$ для Φ приводит к соотношению

$$\oint \mathbf{E}_B \, d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int\limits_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S}$$

(интеграл в правой части равенства берется по произвольной поверхности, опирающейся на контур). Поскольку контур и поверхность неподвижны, операции дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности можно поменять местами:

$$\oint \mathbf{E}_B \, d\mathbf{l} = -\int\limits_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \tag{9.2}$$

В связи с тем, что вектор $\mathbf{B}$ зависит, вообще говоря, как

от времени, так и от координат, мы написали под знаком интеграла символ частной производной по времени (интеграл $\int \mathbf{B}\, d\mathbf{S}$ является функцией только от времени).

Преобразуем левую часть равенства (9.2) по теореме Стокса. В результате получим

$$\int_S [\nabla \mathbf{E}_B]\, d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{S}.$$

Ввиду произвольности выбора поверхности интегрирования должно выполняться равенство

$$[\nabla \mathbf{E}_B] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \qquad (9.3)$$

Ротор поля $\mathbf{E}_B$ в каждой точке пространства равен взятой с обратным знаком производной по времени от вектора $\mathbf{B}$.

Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнитное поле обусловливает появление в пространстве поля $\mathbf{E}_B$, независимо от присутствия в этом пространстве проволочного контура. Наличие контура лишь позволяет обнаружить по возникновению в нем индукционного тока существование в соответствующих точках пространства электрического поля.

Итак, согласно идее Максвелла изменяющееся со временем магнитное поле порождает электрическое поле. Это поле $\mathbf{E}_B$ существенно отличается от порождаемого неподвижными зарядами электростатического поля $\mathbf{E}_q$. Электростатическое поле потенциально, его линии напряженности начинаются и заканчиваются на зарядах. Ротор вектора $\mathbf{E}_q$ в любой точке равен нулю:

$$[\nabla \mathbf{E}_q] = 0 \qquad (9.4)$$

(см. формулу (1.114)). Согласно (9.3) ротор вектора $\mathbf{E}_B$ отличен от нуля. Следовательно, поле $\mathbf{E}_B$, как и магнитное поле, является вихревым. Линии напряженности поля $\mathbf{E}_B$ замкнуты.

Таким образом, электрическое поле может быть как потенциальным ($\mathbf{E}_q$), так и вихревым ($\mathbf{E}_B$). В общем случае электрическое поле может слагаться из поля $\mathbf{E}_q$, создаваемого зарядами, и поля $\mathbf{E}_B$, обусловленного изменяющимся со временем магнитным полем. Сложив почленно соотношения (9.4) и (9.3), получим для ротора напряженности

суммарного поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_B$ следующее уравнение:

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{9.5}$$

Это уравнение является одним из основных в электромагнитной теории Максвелла.

Существование взаимосвязи между электрическим и магнитным полями (выражаемой, в частности, уравнением (9.5)) служит причиной того, что раздельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет лишь относительный смысл. Действительно, электрическое поле создается системой неподвижных зарядов. Однако если заряды неподвижны относительно некоторой инерциальной системы отсчета, то относительно других инерциальных систем эти заряды движутся и, следовательно, порождают не только электрическое, но и магнитное поле. Неподвижный провод с постоянным током создает в каждой точке пространства постоянное магнитное поле. Однако относительно других инерциальных систем этот провод находится в движении. Поэтому создаваемое им магнитное поле в любой точке с данными координатами x, y, z будет меняться и, следовательно, порождать вихревое электрическое поле. Таким образом, поле, которое относительно некоторой системы отсчета оказывается «чисто» электрическим или «чисто» магнитным, относительно других систем отсчета будет представлять собой совокупность электрического и магнитного полей, образующих единое электромагнитное поле.

9.2. Ток смещения

В случае стационарного (т. е. не изменяющегося со временем) электромагнитного поля ротор вектора $\mathbf{H}$ равен в каждой точке плотности тока проводимости:

$$[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} \tag{9.6}$$

(см. (7.9)). Вектор $\mathbf{j}$ связан с плотностью заряда в той же точке уравнением непрерывности (5.11):

$$\nabla \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{9.7}$$

Электромагнитное поле может быть стационарным лишь при условии, что плотность заряда ρ и плотность тока $\mathbf{j}$ не зависят от времени. В этом случае согласно (9.7)

дивергенция $\mathbf{j}$ равна нулю. Поэтому линии тока (линии вектора $\mathbf{j}$) не имеют источников и являются замкнутыми.

Выясним, является ли уравнение (9.6) справедливым в случае изменяющихся со временем полей. Рассмотрим магнитное поле, создаваемое током, текущим при зарядке конденсатора от источника постоянного напряжения U (рис. 9.1). Этот ток постоянен во времени (в момент, когда напряжение на конденсаторе становится равным U, ток прекращается). Линии тока проводимости терпят разрыв в промежутке между обкладками конденсатора (на рисунке линии тока внутри обкладок показаны штриховыми линиями).

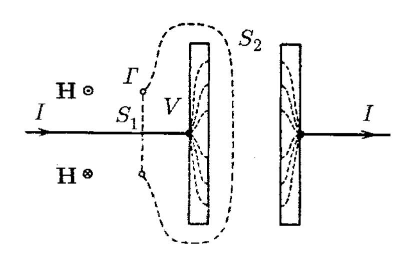


Рис. 9.1

Возьмем круговой контур Г, охватывающий провод, по которому течет ток к конденсатору, и проинтегрируем соотношение (9.6) по пересекающей провод поверхности S_1, ограниченной контуром:

$$\int_{S_1} [\nabla \mathbf{H}]\, d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{j}\, d\mathbf{S}.$$

Преобразовав левую часть по теореме Стокса, получим циркуляцию вектора $\mathbf{H}$ по контуру Г:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = I \qquad (9.8)$$

(I — сила тока, заряжающего конденсатор). Проделав такие же вычисления для поверхности S_2, не пересекающей провод с током (см. рис. 9.1), придем к явно неверному соотношению

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = 0. \qquad (9.9)$$

Полученный нами результат указывает на то, что в случае изменяющихся со временем полей уравнение (9.6) перестает быть справедливым. Напрашивается вывод, что в этом уравнении отсутствует слагаемое, зависящее от про-

изводных полей по времени. Для стационарных полей это слагаемое обращается в нуль.

На неправомерность уравнения (9.6) в случае нестационарных полей указывают также следующие соображения. Возьмем дивергенцию от обеих частей соотношения (9.6): $\nabla[\nabla\mathbf{H}] = \nabla\mathbf{j}$. Дивергенция ротора обязана быть равной нулю (см. (1.108)). Таким образом, мы приходим к выводу, что дивергенция вектора $\mathbf{j}$ также должна быть всегда равной нулю. Однако этот вывод противоречит уравнению непрерывности (9.7). Действительно, при нестационарных процессах ρ может меняться со временем (это, в частности, происходит с плотностью заряда на обкладках заряжаемого конденсатора). В этом случае согласно (9.7) дивергенция $\mathbf{j}$ отлична от нуля.

Чтобы согласовать уравнения (9.6) и (9.7), Максвелл ввел в правую часть уравнения (9.6) дополнительное слагаемое. Естественно, что это слагаемое должно иметь размерность плотности тока. Максвелл назвал его плотностью *тока смещения*. Таким образом, согласно Максвеллу, уравнение (9.6) должно иметь вид

$$[\nabla\mathbf{H}] = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{смещ}}. \tag{9.10}$$

Сумму тока проводимости и тока смещения принято называть *полным током*. Плотность полного тока равна

$$\mathbf{j}_{\text{полн}} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{смещ}}. \tag{9.11}$$

Если положить дивергенцию тока смещения равной дивергенции тока проводимости, взятой с обратным знаком:

$$\nabla\mathbf{j}_{\text{смещ}} = -\nabla\mathbf{j}, \tag{9.12}$$

то дивергенция правой части уравнения (9.10), так же как и дивергенция левой части, всегда будет равна нулю.

Заменив в (9.12) $\nabla\mathbf{j}$ согласно (9.7) на $\partial\rho/\partial t$, получим следующее выражение для дивергенции тока смещения:

$$\nabla\mathbf{j}_{\text{смещ}} = \frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{9.13}$$

Чтобы связать ток смещения с величинами, характеризующими изменение электрического поля со временем, воспользуемся соотношением (2.23), согласно которому дивергенция вектора электрического смещения равна плотности сторонних зарядов:

$$\nabla\mathbf{D} = \rho.$$

Продифференцировав это соотношение по времени, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\mathbf{D}) = \frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Теперь поменяем в левой части порядок дифференцирования по времени и по координатам. В результате придем к следующему выражению для производной ρ по t:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \nabla\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right).$$

Подстановка этого выражения в формулу (9.13) дает

$$\nabla\mathbf{j}_{\text{смещ}} = \nabla\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right).$$

Отсюда

$$\mathbf{j}_{\text{смещ}} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}. \tag{9.14}$$

Подставив выражение (9.14) в формулу (9.10), придем к уравнению

$$[\nabla\mathbf{H}] = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \tag{9.15}$$

которое, как и уравнение (9.5), является одним из основных в теории Максвелла.

Подчеркнем, что термин «ток смещения» является чисто условным. По существу ток смещения — это изменяющееся со временем электрическое поле. Основанием для того, чтобы назвать «током» величину (9.14), служит лишь то, что размерность этой величины совпадает с размерностью плотности тока. Из всех физических свойств, присущих действительному току, ток смещения обладает лишь одним — способностью создавать магнитное поле.

Введение тока смещения, определяемого выражением (9.14), «уравняло в правах» электрическое и магнитное поля. Из явления электромагнитной индукции вытекает, что изменяющееся магнитное поле порождает электрическое поле. Из уравнения (9.15) следует, что изменяющееся электрическое поле порождает магнитное поле.

Ток смещения имеется везде, где есть изменяющееся со временем электрическое поле. В частности, он существует и внутри проводов, по которым течет переменный

электрический ток. Однако внутри проводов ток смещения обычно бывает пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости.

Отметим, что равенство (9.8) является приближенным. Для того чтобы оно стало вполне строгим, к его правой части нужно добавить слагаемое, учитывающее ток смещения, обусловленный слабым рассеянным электрическим полем, имеющимся в окрестности поверхности S_1.

Убедимся в том, что поверхностный интеграл от правой части уравнения (9.10) имеет одинаковое значение для поверхностей S_1 и S_2 (см. рис. 9.1). Через поверхность S_1 «течет» как ток проводимости, так и ток смещения, обусловленный электрическим полем, имеющимся вне конденсатора. Следовательно, для первой поверхности имеем

$$\text{Инт}_1 = \int\limits_{S_1} \mathbf{j}\, d\mathbf{S} + \frac{d}{dt}\int\limits_{S_1} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = I + \frac{d}{dt}\Phi_{1\text{втек}}$$

(мы поменяли во втором слагаемом порядок операций дифференцирования по времени и интегрирования по координатам). Величина, обозначенная буквой I, есть сила тока, текущего по проводу к левой обкладке конденсатора, $\Phi_{1\text{втек}}$ — поток вектора $\mathbf{D}$, втекающий в объем V, ограниченный поверхностями S_1 и S_2 (см. рис. 9.1).

Для второй поверхности $\mathbf{j} = 0$, следовательно,

$$\text{Инт}_2 = \frac{d}{dt}\int\limits_{S_2} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = \frac{d}{dt}\Phi_{2\,\text{вытек}},$$

где $\Phi_{2\,\text{вытек}}$ есть поток вектора $\mathbf{D}$, вытекающий из объема V через поверхность S_2.

Разность интегралов равна

$$\text{Инт}_2 - \text{Инт}_1 = \frac{d}{dt}\Phi_{2\,\text{вытек}} - \frac{d}{dt}\Phi_{1\text{втек}} - I.$$

Силу тока I можно представить как dq/dt, где q — заряд на обкладке конденсатора. Поток, втекающий внутрь через поверхность S_1, равен взятому с обратным знаком потоку, вытекающему через ту же поверхность наружу. Заменив $\Phi_{1\text{втек}}$ на $-\Phi_{1\text{вытек}}$, а I на dq/dt, получим

$$\text{Инт}_2 - \text{Инт}_1 = \frac{d}{dt}(\Phi_{2\text{вытек}} + \Phi_{1\text{вытек}}) - \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(\Phi_D - q), \tag{9.16}$$

где Φ_D — поток вектора $\mathbf{D}$ через замкнутую поверхность, образованную поверхностями S_1 и S_2. Согласно (2.25) этот поток должен быть равен заряду, заключенному внутри поверхности. В данном случае это заряд q на обкладке конденсатора. Таким образом, правая часть соотношения (9.16) равна нулю. Отсюда следует, что значение поверхностного интеграла от вектора плотности полного тока не зависит от выбора поверхности, по которой вычисляется интеграл.

Для тока смещения, как и для тока проводимости, можно строить линии тока. Согласно формуле (2.35) электрическое смещение в зазоре конденсатора равно поверхностной плотности заряда на обкладке: $D = \sigma$. Отсюда $\dot{D} = \dot{\sigma}$. Левая часть дает плотность тока смещения в зазоре, правая часть — плотность тока проводимости внутри обкладок. Равенство этих плотностей означает, что на границе обкладок линии тока проводимости непрерывно переходят в линии тока смещения. Следовательно, линии полного тока оказываются замкнутыми.

9.3. Уравнения Максвелла

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Эта теория объяснила все известные в то время экспериментальные факты и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось впоследствии. Основным следствием теории Максвелла был вывод о существовании электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света. Теоретическое исследование свойств этих волн привело Максвелла к созданию электромагнитной теории света. Основу теории образуют уравнения Максвелла. В учении об электромагнетизме эти уравнения играют такую же роль, как законы Ньютона в механике или основные законы (начала) в термодинамике.

Первую пару уравнений Максвелла образуют уравнения (9.5) и (7.3):

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (9.17)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0. \qquad (9.18)$$

Первое из этих уравнений связывает значение $\mathbf{E}$ с изменениями вектора $\mathbf{B}$ во времени и является по существу

выражением закона электромагнитной индукции. Второе уравнение указывает на отсутствие источников магнитного поля, т. е. магнитных зарядов.

Вторую пару уравнений Максвелла образуют уравнения (9.15) и (2.23):

$$[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D}/\partial t, \qquad (9.19)$$

$$\nabla \mathbf{D} = \rho. \qquad (9.20)$$

Первое уравнение устанавливает связь между токами проводимости и смещения и порождаемым ими магнитным полем. Второе показывает, что источниками вектора **D** служат сторонние заряды.

Уравнения (9.17)–(9.20) представляют собой *уравнения Максвелла в дифференциальной форме*. Отметим, что в первую пару уравнений входят только основные характеристики поля: **E** и **B**. Во второй же паре фигурируют только вспомогательные величины **D** и **H**. Каждое из векторных уравнений (9.17) и (9.19) эквивалентно трем скалярным уравнениям, связывающим компоненты векторов, стоящих в левой и правой частях равенств. Воспользовавшись формулами (1.81) и (1.93)–(1.95), представим уравнения Максвелла в скалярной форме:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \qquad (9.21)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad (9.22)$$

(первая пара уравнений),

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_y + \frac{\partial D_y}{dt}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z + \frac{\partial D_z}{dt}, \qquad (9.23)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \qquad (9.24)$$

(вторая пара уравнений).

Всего получилось 8 уравнений, в которые входят 12 функций (по три компоненты векторов **E**, **B**, **D**, **H**). Поскольку число уравнений меньше числа неизвестных функций, уравнений (9.17)–(9.20) недостаточно для нахождения полей по заданным распределениям зарядов и токов. Чтобы осуществить расчет полей, нужно дополнить уравнения Максвелла уравнениями, связывающими **D** и **j** с **E**, а также **H** с **B**. Эти уравнения имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \tag{9.25}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \tag{9.26}$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \tag{9.27}$$

(см. (2.21), (7.17) и (5.22)).

Совокупность уравнений (9.17)–(9.20) и (9.25)–(9.27) образует основу электродинамики покоящихся сред.

Уравнения

$$\oint\limits_{\Gamma} \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int\limits_{S} \mathbf{B}\,d\mathbf{S}, \tag{9.28}$$

$$\oint\limits_{S} \mathbf{B}\,d\mathbf{S} = 0 \tag{9.29}$$

(первая пара) и

$$\oint\limits_{\Gamma} \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \int\limits_{S} \mathbf{j}\,d\mathbf{S} + \frac{d}{dt}\int\limits_{S} \mathbf{D}\,d\mathbf{S}, \tag{9.30}$$

$$\oint\limits_{S} \mathbf{D}\,d\mathbf{S} = \int\limits_{V} \rho\,dV \tag{9.31}$$

(вторая пара) представляют собой у р а в н е н и я М а к с в е л л а в и н т е г р а л ь н о й ф о р м е.

Уравнение (9.28) получается путем интегрирования соотношения (9.17) по произвольной поверхности S с последующим преобразованием левой части по теореме Стокса в интеграл по контуру Г, ограничивающему поверхность S. Уравнение (9.30) получается таким же способом из соотношения (9.19). Уравнения (9.29) и (9.31) получаются из соотношений (9.18) и (9.20) путем интегрирования по произвольному объему V с последующим преобразованием левой части по теореме Остроградского–Гаусса в интеграл по замкнутой поверхности S, ограничивающей объем V.

Глава 10

Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях

10.1. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле

Представим себе заряд e', движущийся в однородном магнитном поле со скоростью $\mathbf{v}$, перпендикулярной к $\mathbf{B}$. Магнитная сила сообщает заряду перпендикулярное к скорости ускорение

$$w_n = \frac{F}{m} = \frac{e'}{m} vB \tag{10.1}$$

(см. формулу (6.36); угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ прямой). Это ускорение изменяет лишь направление скорости, модуль же скорости остается неизменным. Следовательно, и ускорение (10.1) будет постоянным по модулю. При этих условиях заряженная частица движется равномерно по окружности, радиус которой определяется соотношением $w_n = v^2/R$. Подставив сюда значение (10.1) для w_n и решив получившееся уравнение относительно R, получим

$$R = \frac{m}{e'} \frac{v}{B}. \tag{10.2}$$

Итак, в случае, когда заряженная частица движется в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости, в которой происходит движение, траектория частицы является окружностью. Радиус этой окружности зависит от скорости частицы, магнитной индукции поля и отношения заряда частицы e' к ее массе m. Отношение e'/m называется удельным зарядом.

Найдем время T, затрачиваемое частицей на один оборот. Для этого разделим длину окружности $2\pi R$ на скорость частицы v. В результате получим

$$T = 2\pi \frac{m}{e'} \frac{1}{B}. \tag{10.3}$$

Из (10.3) следует, что период обращения частицы не зависит от ее скорости, он определяется только удельным зарядом частицы и магнитной индукцией поля.

Выясним характер движения заряженной частицы в случае, когда ее скорость образует с направлением однородного магнитного поля угол α, отличный от прямого. Разложим вектор $\mathbf{v}$ на две составляющие: $\mathbf{v}_\perp$ — перпендикулярную к $\mathbf{B}$ и $\mathbf{v}_\parallel$ — параллельную $\mathbf{B}$ (рис. 10.1). Модули этих составляющих равны

$$v_\perp = v \sin\alpha, \quad v_\parallel = v\cos\alpha.$$

Магнитная сила имеет модуль

$$F = e'vB\sin\alpha = e'v_\perp B$$

и лежит в плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{B}$. Создаваемое этой силой ускорение является для составляющей $\mathbf{v}_\perp$ нормальным. Составляющая магнитной силы в направлении $\mathbf{B}$ равна нулю; поэтому повлиять на $\mathbf{v}_\parallel$ эта сила не может.

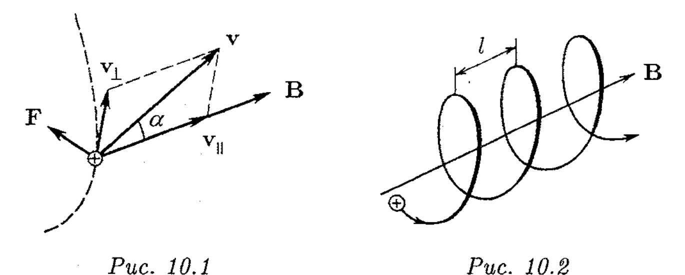


Рис. 10.1 *Рис. 10.2*

Таким образом, движение частицы можно представить как наложение двух движений: 1) перемещения вдоль направления $\mathbf{B}$ с постоянной скоростью $v_\parallel = v\cos\alpha$ и 2) равномерного движения по окружности в плоскости, перпендикулярной к вектору $\mathbf{B}$. Радиус окружности определяется формулой (10.2) с заменой v на $v_\perp = v\sin\alpha$. Траектория движения представляет собой винтовую линию, ось которой совпадает с направлением $\mathbf{B}$ (рис. 10.2). Шаг линии l можно найти, умножив $v_\parallel$ на определяемый формулой (10.3) период обращения T:

$$l = v_\parallel T = 2\pi \frac{m}{e'} \frac{1}{B} v\cos\alpha. \qquad (10.4)$$

Направление, в котором закручивается траектория, зависит от знака заряда частицы. Если заряд положителен,

траектория закручивается против часовой стрелки. Траектория, по которой движется отрицательно заряженная частица, закручивается по часовой стрелке (предполагается, что мы смотрим на траекторию вдоль направления $\mathbf{B}$; частица при этом летит от нас, если $\alpha < \pi/2$, и на нас, если $\alpha > \pi/2$).

Формулы (10.2) и (10.3) были получены исходя из ньютоновского уравнения $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$. Иначе обстоит дело в релятивистском случае. Поскольку магнитная сила перпендикулярна к скорости частицы, модуль скорости остается постоянным. Поэтому уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \mathbf{F}$$

(см. формулу (6.45) кн. 1) упрощается следующим образом:

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \tag{10.5}$$

($v^2 = \text{const}!$). В этом уравнении $d\mathbf{v}/dt$ есть нормальное ускорение, модуль которого равен v^2/R. Модуль силы в данном случае равен $e'vB$. Заменив в (10.5) векторы их модулями, получим уравнение

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{v^2}{R} = e'vB,$$

откуда

$$R = \frac{m}{e'}\frac{v}{B\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{10.6}$$

(ср. с (10.2)). Следовательно, для периода обращения частицы $T = 2\pi R/v$ получается формула

$$T = 2\pi\frac{m}{e'}\frac{1}{B\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{10.7}$$

Таким образом, в релятивистском случае период обращения по мере увеличения скорости частицы возрастает. При $v \ll c$ формула (10.7) переходит в (10.3).

10.2. Отклонение движущихся заряженных частиц электрическим и магнитным полями

Рассмотрим узкий пучок одинаковых заряженных частиц (например, электронов), попадающий в отсутствие полей на перпендикулярный к нему экран в точке O (рис. 10.3). Определим смещение следа пучка, вызываемое перпендикулярным к пучку однородным электрическим полем, действующим на пути длиной l_1. Пусть первоначально скорость частиц равна $\mathbf{v}_0$. Войдя в область поля, каждая частица будет двигаться с постоянным по модулю и направлению, перпендикулярным к $\mathbf{v}_0$ ускорением

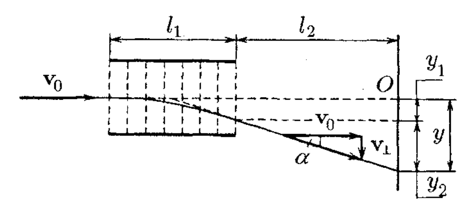


Рис. 10.3

$w_\perp = (e'/m)E$ (e'/m — удельный заряд частицы). Движение под действием поля продолжается $t = l_1/v_0$. За это время частицы сместятся на расстояние

$$y_1 = \frac{1}{2}w_\perp t^2 = \frac{1}{2}\frac{e'}{m}E\frac{l_1^2}{v_0^2} \qquad (10.8)$$

и приобретут перпендикулярную к $\mathbf{v}_0$ составляющую скорости

$$v_\perp = w_\perp t = \frac{e'}{m}E\frac{l_1}{v_0}.$$

В дальнейшем частицы летят прямолинейно в направлении, которое образует с вектором $\mathbf{v}_0$ угол α, определяемый соотношением

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_\perp}{v_0} = \frac{e'}{m}E\frac{l_1}{v_0^2}. \qquad (10.9)$$

В результате в дополнение к смещению (10.8) пучок получает смещение

$$y_2 = l_2\operatorname{tg}\alpha = \frac{e'}{m}E\frac{l_1 l_2}{v_0^2},$$

где l_2 — расстояние от границы области, в которой имеется поле, до экрана.

Таким образом, смещение следа пучка относительно точки O равно

$$y = y_1 + y_2 = \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v_0^2} \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2\right). \qquad (10.10)$$

Приняв во внимание формулу (10.9), выражению для смещения можно придать вид

$$y = \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2\right) \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда вытекает, что частицы, покинув поле, летят так, как если бы они вылетели из центра конденсатора, создающего поле, под углом α, который определяется формулой (10.9).

Теперь предположим, что на имеющем протяженность l_1 пути частиц включается перпендикулярное к их скорости $\mathbf{v}_0$ однородное магнитное поле (рис. 10.4; поле перпендикулярно к плоскости рисунка, область поля обведена

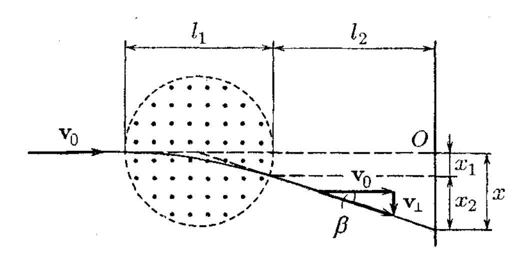


Рис. 10.4

окружностью). Под действием поля каждая частица получит постоянное по модулю ускорение $w_\perp = (e'/m)v_0 B$. Ограничиваясь случаем, когда отклонение пучка полем невелико, можно считать, что ускорение $\mathbf{w}_\perp$ постоянно по направлению и перпендикулярно к $\mathbf{v}_0$. Тогда для расчета смещения можно использовать полученные нами формулы, заменив в них ускорение $w_\perp = (e'/m)E$ значением $w_\perp = (e'/m)v_0 B$. В результате для смещения, которое мы теперь обозначим буквой x, получится выражение

$$x = \frac{e'}{m} B \frac{l_1}{v_0} \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2\right). \qquad (10.11)$$

Угол, на который отклонится пучок магнитным полем, определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{e'}{m}B\frac{l_1}{v_0}. \qquad (10.12)$$

С учетом (10.12) формулу (10.11) можно представить в виде

$$x = \left(\frac{1}{2}l_1 + l_2\right)\operatorname{tg}\beta.$$

Следовательно, при небольших отклонениях частицы, покинув магнитное поле, летят так, как если бы они вылетели из центра области, в которой имеется отклоняющее поле, под углом β, значение которого определяется выражением (10.12).

Из формул (10.10) и (10.11) видно, что как отклонение электрическим, так и отклонение магнитным полем пропорционально удельному заряду частиц.

Отклонение пучка электронов электрическим или магнитным полем используется в электронно-лучевых трубках. Внутри трубки с электрическим отклонением (рис. 10.5), кроме так называемого электронного прожектора, создающего узкий пучок быстрых электронов (электронный луч), помещаются две пары взаимно перпендикулярных отклоняющихся пластин. Подавая напряжение на любую пару пластин, можно вызвать пропорциональное ему смещение электронного луча в направлении, перпендикулярном к данным пластинам. Экран трубки покрывают флуоресцирующим составом. Поэтому в месте попадания на экран электронного луча возникает ярко светящееся пятно.

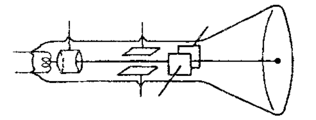


Рис. 10.5

Электронно-лучевые трубки применяются в осциллографах — приборах, позволяющих изучать быстропротекающие процессы. На одну пару отклоняющих пластин подают напряжение, изменяющееся со временем линейно (напряжение развертки), на другую — исследуемое напряжение. Вследствие ничтожной инерционности электронного луча его отклонение практически без запаздывания следует за изменениями напряжений на обеих парах отклоняющих пластин, причем луч вычерчивает на экране осциллографа график зависимости исследуемого напряжения от времени. Многие неэлектрические величины могут

быть с помощью соответствующих устройств (датчиков) преобразованы в электрические напряжения. Поэтому с помощью осциллографов исследуют самые различные процессы.

Электронно-лучевая трубка является неотъемлемой частью телевизионных устройств. В телевидении чаще применяются трубки с магнитным управлением электронным лучом. У таких трубок вместо отклоняющих пластин имеются две расположенные снаружи взаимно перпендикулярные системы катушек, каждая из которых создает перпендикулярное к лучу магнитное поле. Изменяя ток в катушках, вызывают перемещение светового пятна, создаваемого электронным лучом на экране.

10.3. Определение заряда и массы электрона

Удельный заряд электрона (т. е. отношение e/m) был впервые измерен Томсоном[1]) в 1897 г. с помощью разрядной трубки, изображенной на рис. 10.6. Выходящий из отверстия в аноде А электронный пучок (катодные лучи; см. § 12.6) проходил между пластинами плоского конденсатора и попадал на флуоресцирующий экран, здавая на нем светящееся пятно. Подавая напряжение на пластины конденсатора, можно было воздействовать на пучок практически однородным электрическим полем. Трубка помещалась между полюсами электромагнита, с помощью которого можно было создавать на том же участке пути электронов перпендикулярное к электрическому однородное магнитное поле (область этого поля обведена на рис. 10.6 окружностью). При включенных полях пучок попадал на экран в точке O. Каждое из полей в отдельности вызывало смещение пучка в вертикальном направлении.

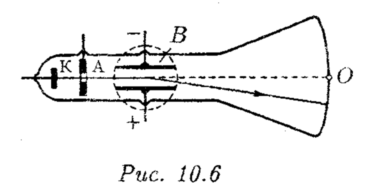


Рис. 10.6

В соответствии с формулой (10.11) смещение x светящегося пятна под действием магнитного поля равно

$$x = K\frac{e}{m}\frac{B}{v_0} = K\frac{1}{R}, \qquad (10.13)$$

[1]) Джозеф Джон Томсон (1856–1940) — английский физик.

где $K = l_1(l_1/2 + l_2)$ — коэффициент, определяемый геометрией прибора, v_0 — скорость электронов, B — магнитная индукция поля, R — радиус траектории, по которой движется электрон в магнитном поле (см. (10.2)). Согласно (10.13) смещение следа пучка на экране пропорционально кривизне траектории (напомним, что кривизна окружности обратна ее радиусу).

Измерив смещение x пятна под действием магнитного поля B, Томсон включал дополнительно электрическое поле и подбирал его напряженность E так, чтобы пятно вернулось в положение, в котором оно находилось в отсутствие полей. В этом случае магнитная сила уравновешивалась электрической, т. е. соблюдалось равенство

$$eE = ev_0B. \qquad (10.14)$$

Исключив v_0 из уравнений (10.13) и (10.14), получим формулу

$$\frac{e}{m} = \frac{x}{K}\frac{E}{B^2}. \qquad (10.15)$$

Томсон осуществил измерения с различными газами (воздухом и углекислым газом) и разными материалами катода (алюминием и платиной). Скорость электронов также варьировалась примерно в два раза. Значения e/m во всех случаях получились одними и теми же с погрешностью 15%. Точность измерений Томсона была мала. Наличие систематических погрешностей привело к тому, что полученное значение e/m в 2,5 раза превышает принятое в настоящее время значение.

Скорость электронов в опыте Томсона была невелика, вследствие чего релятивистские эффекты не сказывались. Впоследствии, когда стали экспериментировать с электронами больших скоростей, обнаружилось, что расчеты по формуле (10.15) приводят по мере роста v ко все меньшим значениям e/m. Однако если принять в формуле (10.13) релятивисткое выражение (10.6) для R, то вычисленные значения e/m оказываются не зависящими от v.

Буш[2]) применил для определения удельного заряда электронов метод магнитной фокусировки. Суть этого метода заключается в следующем. Допустим, что в однородном магнитном поле вылетает из некоторой точки слегка

---

[2]) Георг Адольф Буш (р. в 1908 г.) — швейцарский физик.

расходящийся симметричный относительно направления поля пучок электронов, имеющих одинаковую по модулю скорость v. Направления, по которым вылетают электроны, образуют с направлением **B** небольшие углы α. В § 10.1 было выяснено, что электроны движутся в этом случае по винтовым траекториям, совершая за одинаковое время

$$T = 2\pi \frac{m}{e} \frac{1}{B}$$

полный оборот и смещаясь вдоль направления поля на расстояние l, равное

$$l = v \cos\alpha \cdot T. \qquad (10.16)$$

Вследствие малости угла α расстояния (10.16) для разных электронов оказываются практически одинаковыми и равными vT (для малых углов $\cos\alpha \approx 1$). Следовательно, слегка расходящийся пучок сфокусируется в точке, отстоящей от точки вылета электронов на расстояние

$$l = vT = 2\pi \frac{m}{e} \frac{v}{B}. \qquad (10.17)$$

В опыте Буша электроны, испущенные раскаленным катодом К (рис. 10.7), ускоряются, проходя разность потенциалов U, приложенную между катодом К и анодом А. В результате они приобретают скорость v, значение которой может быть найдено из соотношения

$$eU = \frac{mv^2}{2}. \qquad (10.18)$$

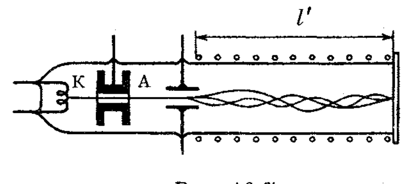


Рис. 10.7

Вылетев затем из отверстия в аноде, электроны образуют узкий пучок, направленный вдоль оси эвакуированной трубки, вставленной внутрь соленоида. На входе в соленоид помещается конденсатор, на который подается переменное напряжение. Поле, создаваемое конденсатором, отклоняет электроны пучка от оси прибора на небольшие изменяющиеся со временем углы α. Это приводит к «завихрению» пучка — электроны начинают двигаться по различным спиральным траекториям. На выходе из соленоида ставится флуоресцирующий экран. Если подобрать

магнитную индукцию B так, чтобы расстояние l' от конденсатора до экрана удовлетворяло условию

$$l' = nl \tag{10.19}$$

(l — шаг спирали, n — целое число), то точка пересечения траекторий электронов попадает на экран — электронный пучок окажется сфокусированным в этой точке и возбудит на экране резкое светящееся пятно. Если условие (10.19) не соблюдается, светящееся пятно на экране будет размытым. Решив совместно уравнения (10.17), (10.18) и (10.19), можно найти e/m и v.

Принятое в настоящее время значение удельного заряда электрона, установленное с учетом результатов, полученных разными методами, равно

$$\frac{e}{m} = 1,7588 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг} = 5,2728 \cdot 10^{17} \text{ СГСЭ-ед./г.} \tag{10.20}$$

Заряд электрона был определен с большой точностью Милликеном[3]) в 1909 г. В закрытое пространство между горизонтально расположенными пластинами конденсатора (рис. 10.8) Милликен вводил мельчайшие капельки масла. При разбрызгивании капельки электризовались, и их можно было устанавливать неподвижно, подбирая величину и знак напряжения на конденсаторе. Равновесие наступало при условии

$$P' = e'E; \tag{10.21}$$

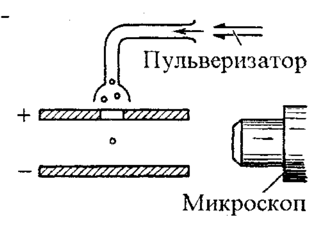


Рис. 10.8

здесь e' — заряд капельки, P' — результирующая силы тяжести и архимедовой силы, равная

$$P' = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)g \tag{10.22}$$

(ρ — плотность капельки, r — ее радиус, ρ_0 — плотность воздуха).

Из формул (10.21) и (10.22), зная r, можно было найти e. Для определения радиуса измерялась скорость v_0 равномерного падения капельки в отсутствие поля. Равномерное

---

[3]) Роберт Эндрус Милликен (1868–1953) — американский физик.

движение капельки устанавливается при условии, что сила P' уравновешивается силой сопротивления $F = 6\pi\eta r v$ (см. формулу (9.25) кн. 1; η — вязкость воздуха):

$$P' = 6\pi\eta r v_0. \tag{10.23}$$

Движение капельки наблюдалось с помощью микроскопа. Для измерения v_0 определялось время, за которое капелька проходила расстояние между двумя нитями, видимыми в поле зрения микроскопа.

Точно зафиксировать равновесие капельки очень трудно. Поэтому вместо поля, отвечающего условию (10.21), включалось такое поле, под действием которого капелька начинала двигаться с небольшой скоростью вверх. Установившаяся скорость подъема v_E определяется из условия, что сила P' и сила $6\pi\eta r v_E$ в сумме уравновешивают силу $e'E$:

$$P' + 6\pi\eta r v_E = e'E. \tag{10.24}$$

Исключив из уравнений (10.22)–(10.24) P' и r, получим выражение для e':

$$e' = 9\pi\sqrt{\frac{2\eta^3 v_0}{(\rho-\rho_0)g}}\frac{v_0+v_E}{E}$$

(в эту формулу Милликен вносил поправку, учитывающую, что размеры капелек были сравнимы с длиной свободного пробега молекул воздуха).

Итак, измерив скорость свободного падения капельки v_0 и скорость ее подъема v_E в известном электрическом поле E, можно было найти заряд капельки e'. Произведя измерение скорости v_E при некотором значении заряда e', Милликен вызывал ионизацию воздуха, облучая пространство между пластинами рентгеновскими лучами. Отдельные ионы, прилипая к капельке, изменяли ее заряд, в результате чего скорость v_E также менялась. После измерения нового значения скорости снова облучалось пространство между пластинами и т. д.

Измеренные Милликеном изменения заряда капельки $\Delta e'$ и сам заряд e' каждый раз получались целыми кратными одного и того же заряда e. Тем самым была экспериментально доказана дискретность электрического заряда, т. е. тот факт, что всякий заряд слагается из элементарных зарядов одинаковой величины.

Значение элементарного заряда, установленное с учетом измерений Милликена и данных, полученных другими методами, равно

$$e = 1,602\,177 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл} = 4,803\,205 \cdot 10^{-10}\ \text{СГСЭ-ед.} \qquad (10.25)$$

То же числовое значение имеет заряд электрона.

Из (10.20) и (10.25) получается для массы электрона значение

$$m = 0,910\,939 \cdot 10^{-30}\ \text{кг} = 0,910\,939 \cdot 10^{-27}\ \text{г}, \qquad (10.26)$$

приблизительно в 1840 раз меньшее массы самого легкого из атомов — атома водорода.

В обнаружении дискретной природы электричества сыграли большую роль законы электролиза, установленные экспериментально Фарадеем в 1836 г. Согласно этим законам масса m вещества, выделяющегося при прохождении тока через электролит[4]), пропорциональна переносимому током заряду q:

$$m = \frac{1}{F}\frac{M}{z}q. \qquad (10.27)$$

Здесь M — масса моля выделяющегося вещества, z — валентность этого вещества, F — постоянная Фарадея, равная

$$F = 96,5 \cdot 10^3\ \text{Кл/моль}. \qquad (10.28)$$

Разделив обе части равенства (10.27) на массу иона, получим

$$N = \frac{1}{F}\frac{N_A}{z}q$$

(N_A — постоянная Авогадро, N — количество ионов, содержащихся в массе m). Отсюда для заряда одного иона получается значение

$$e' = \frac{q}{N} = \frac{F}{N_\text{A}}z.$$

[4]) Электролитами называются растворы солей, щелочей или кислот в воде и некоторых других жидкостях, а также расплавы солей, являющихся в твердом состоянии ионными кристаллами. В электролитах при прохождении через них тока происходят химические превращения. Такие вещества называются проводниками второго рода в отличие от проводников первого рода, у которых прохождение тока не сопровождается химическими превращениями.

Следовательно, заряд иона оказывается целым кратным величины

$$e = \frac{F}{N_A}, \qquad (10.29)$$

которая представляет собой элементарный заряд.

Таким образом, из анализа законов электролиза вытекает дискретность зарядов, которыми могут обладать ионы в электролитах.

Подстановка в (10.29) значения (10.28) для F и найденного из опытов Перрена (см. § 2.9 кн. 3) значения N_A дает для e значение, хорошо согласующееся со значением, найденным Милликеном.

Поскольку точность, с которой определяется постоянная Фарадея F, и точность значения e, полученного Милликеном, намного превосходят точность опытов Перрена по определению N_A соотношение (10.29) было использовано для определения постоянной Авогадро. При этом было взято значение F, найденное из опытов по электролизу, и значение e, полученное Милликеном.

10.4. Определение удельного заряда ионов. Масс-спектрографы

Описанные в предыдущем параграфе методы определения удельного заряда пригодны в том случае, если все частицы в пучке имеют одинаковую скорость. Все образующие пучок электроны ускоряются одинаковой разностью потенциалов, приложенной между катодом, из которого они вылетают, и анодом; поэтому разброс значений скоростей электронов в пучке очень мал. Если бы это было не так, электронный пучок давал бы на экране сильно размытое пятно, и измерения были бы невозможны.

Ионы образуются за счет ионизации молекул газа, происходящей в объеме, имеющем заметную протяженность. Возникая в разных местах этого объема, ионы проходят затем неодинаковую разность потенциалов, вследствие чего их скорости бывают различными. Таким образом, методы, которыми был определен удельный заряд электронов, к ионам неприменимы. В 1907 г. Томсоном был разработан «метод парабол», который позволил обойти отмеченное затруднение.

В опыте Томсона тонкий пучок положительных ионов проходил через область, в которой на него одновременно

воздействовали параллельные друг другу электрическое и магнитное поля (рис. 10.9). Оба поля были практически однородными и образовывали с первоначальным направлением пучка прямой угол. Они вызывали отклонения ионов: магнитное — в направлении оси x, электрическое — вдоль оси y. Согласно формулам (10.11) и (10.10) эти отклонения равны

$$x = \frac{e'}{m} B \frac{l_1}{v} \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right), \quad y = \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v^2} \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right), \tag{10.30}$$

где v — скорость данного иона с удельным зарядом e'/m, l_1 — протяженность области, в которой поля действуют на пучок, l_2 — расстояние от границы этой области до фотопластинки, регистрировавшей попадавшие на нее ионы.

Выражения (10.30) представляют собой координаты точки, в которую попадает на пластинку ион, имеющий

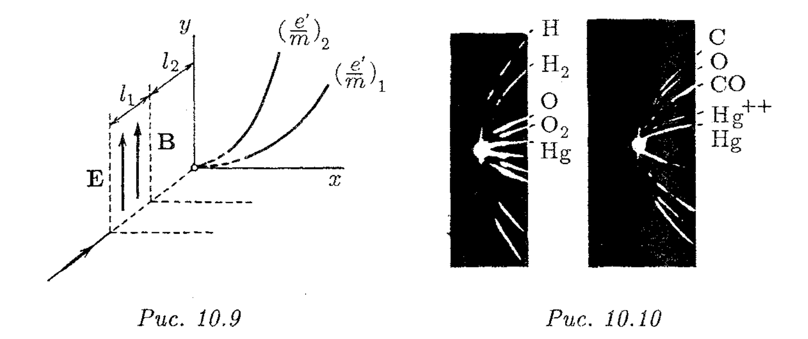


Рис. 10.9 Рис. 10.10

данные значения e'/m и скорости v. Ионы с одинаковым удельным зарядом, но различными скоростями попадали в разные точки пластинки. Исключив из формул (10.30) скорость v, получим уравнение кривой, вдоль которой располагались следы ионов с одним и тем же значением e'/m:

$$y = \frac{E}{B^2 l_1 (0,5 l_1 + l_2)} \frac{m}{e'} x^2. \tag{10.31}$$

Из (10.31) следует, что ионы с одинаковым e'/m и различными v оставляли на пластинке след в виде параболы. Ионы с различными e'/m располагались вдоль разных парабол. Зная параметры прибора (т. е. E, B, l_1 и l_2) и измеряя смещения x и y, можно было по формуле (10.31) нахо-

дить удельный заряд ионов, соответствующих каждой параболе. При изменении направления одного из полей соответствующая координата изменяла знак на обратный, так что получались параболы, симметричные первоначальным. Деля пополам расстояние между аналогичными точками симметричных парабол, можно было находить x и y. След, оставляемый на пластинке пучком при выключенных полях, давал начало координат. На рис. 10.10 показаны первые параболы, полученные Томсоном.

Произведя опыт с химически чистым неоном, Томсон обнаружил, что этот газ давал две параболы, соответствующие относительным атомным массам, равным 20 и 22. Этот результат послужил основанием для предположения о том, что существуют две химически неразличимые разновидности атомов неона (по современной терминологии — два изотопа неона). Доказательство этого предположения было дано Астоном[5]), усовершенствовавшим метод определения удельного заряда ионов.

Прибор Астона, названный им масс-спектрографом, имел следующее устройство (рис. 10.11). Пучок ионов, выделенный системой щелей, пропускался последо-

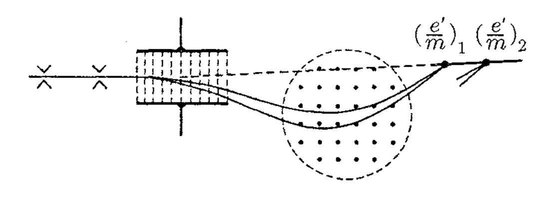


Рис. 10.11

вательно через электрическое и магнитное поля, направленные так, что они вызывали отклонения ионов в противоположные стороны. При прохождении электрического поля ионы с данным e'/m отклонялись тем сильнее, чем с меньшей скоростью они двигались. Поэтому из электрического поля ионы выходили в виде расходящегося пучка. В магнитном поле траектории ионов также искривлялись тем сильнее, чем меньше была их скорость. Поскольку направления, в которых отклонялись ионы полями, были противоположны, после выхода из магнитного поля ионы образовывали пучок, сходящийся в одной точке.

---

[5]) Фрэнсис Уильям Астон (1877–1945) — английский физик.

Ионы с другими значениями удельного заряда фокусировались в других точках (на рис. 10.11 показаны траектории ионов лишь для одного значения e'/m). Соответствующий расчет показывает что точки, в которых сходятся пучки, образованные ионами с различными e'/m, лежат приблизительно на одной прямой (на рисунке она показана штриховой линией). Располагая вдоль этой прямой фотопластинку, Астон получал на ней ряд штрихов, каждый из которых соответствовал определенному значению e'/m.

Сходство получающегося на пластинке изображения с фотографией оптического линейчатого спектра послужило причиной того, что Астон назвал его масс-спектрограммой,

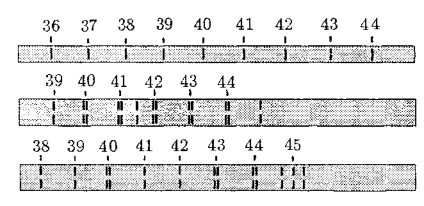


Рис. 10.12

а свой прибор — масс-спектрографом. На рис. 10.12 приведены полученные Астоном масс-спектрограммы (против штрихов указаны массовые числа ионов).

Бейнбридж создал прибор другого типа. В масс-спектрографе Бейнбриджа (рис. 10.13) пучок ионов проходит сначала через так называемый селектор (или фильтр) скоростей, который выделяет из пучка ионы с определенным значением скорости. В селекторе ионы подвергаются одновременному воздействию взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей, отклоняющих ионы в противоположные стороны. Через выходную щель селектора проходят только те ионы, для которых действия электрического и магнитного полей компенсируют друг друга. Это происходит при усло-

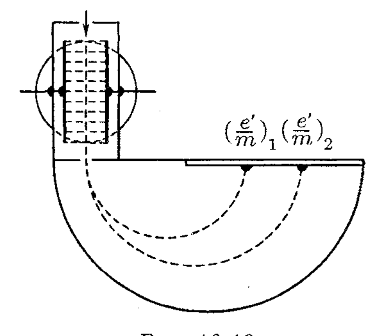


Рис. 10.13

вии, что $e'E = e'vB$. Следовательно, скорости вышедших из селектора ионов, независимо от их массы и заряда, имеют одинаковое значение, равное $v = E/B$.

Выйдя из селектора, ионы попадают в область перпендикулярного к их скорости однородного магнитного поля с индукцией B'. В этом поле они движутся по окружностям, радиусы которых зависят от e'/m:

$$R = \frac{m}{e'}\frac{v}{B'}$$

(см. (10.2)). Описав половину окружности, ионы попадают на фотопластинку на расстояниях от щели, равных $2R$. Следовательно, ионы каждого сорта (определяемого значением e'/m) оставляют на пластинке след в виде узкой полоски.

Зная параметры прибора, можно вычислить удельные заряды ионов. Поскольку заряды ионов являются целыми кратными элементарного заряда e, по найденным значениям e'/m можно определить массы ионов.

В настоящее время имеется много типов усовершенствованных масс-спектрографов. Созданы также приборы, в которых ионы регистрируются не фотопластинкой, а с помощью электрического устройства. Они получили название масс-спектрометров.

10.5. Ускорители заряженных частиц

В физике атомного ядра и элементарных частиц большую роль играют опыты, использующие пучки заряженных частиц высоких энергий. Устройства, применяемые для получения таких пучков, называются ускорителями заряженных частиц. Имеется много типов таких устройств. Мы познакомимся с принципами действия некоторых из них.

Генератор Ван де Граафа. В 1929 г. Ван де Грааф[6]) предложил конструкцию электростатического генератора, основывающегося на том, что избыточные заряды располагаются по внешней поверхности проводника. Схема генератора показана на рис. 10.14. Полый металлический шар, называемый кондуктором, устанавливается на изолирующей колонне. Внутрь шара введена надетая на ва-

---

[6]) Роберт Ван де Грааф (1901–1967) — американский физик.

лики бесконечная движущаяся лента из шелка или прорезиненной ткани. У основания колонны вблизи ленты установлена гребенка из остриев, с которых стекает на ленту заряд, возбуждаемый генератором напряжения (ГН) на несколько десятков киловольт. Внутри кондуктора установлена вторая гребенка, на острия которой переходит заряд с ленты. Эта гребенка соединена с кондуктором, так что снятый с ленты заряд сразу же переходит на его внешнюю поверхность. По мере накапливания на кондукторе зарядов его потенциал растет, пока утечка заряда не станет равной подводимому заряду. Утечка происходит в основном за счет ионизации газа вблизи поверхности кондуктора. Возникающее вследствие этого прохождение тока через газ называется коронным разрядом или коронированием (см. § 12.8). Чтобы уменьшить коронирование, поверхность кондуктора тщательно шлифуют.

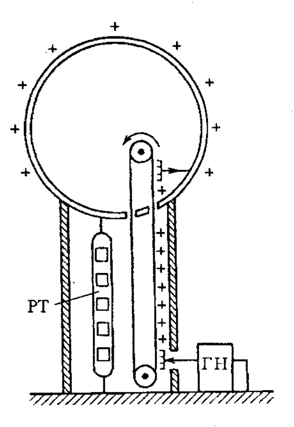


Рис. 10.14

Потенциал, до которого можно зарядить кондуктор, ограничивается тем, что при напряженности поля около 3 МВ/м (30 кВ/см) в воздухе при атмосферном давлении возникает разряд. Для шара $E = \varphi/r$. Поэтому для получения больших разностей потенциалов приходится делать кондуктор больших размеров (до 10 м в диаметре). Предельная разность потенциалов, которую можно практически получить с помощью генератора Ван де Граафа, составляет около 10 МВ (10^7 В).

Ускорение частиц осуществляется в разрядной трубке (РТ), к электродам которой прикладывается разность потенциалов, получаемая на генераторе. Иногда генератор Ван де Граафа строят в виде двух одинаковых расположенных поблизости колонн, кондукторы которых заряжаются разноименно. В этом случае разрядная трубка включается между кондукторами.

Заметим, что лента генератора, кондуктор, разрядная трубка и земля образуют замкнутую цепь постоянного тока. Внутри трубки заряды движутся под действием электростатического поля. Перенос зарядов от земли к кондуктору осуществляется сторонними силами, роль которых

выполняют механические силы, приводящие в движение ленту генератора.

Бетатрон. Так называют индукционный ускоритель электронов, в котором ускорение осуществляется вихревым электрическим полем. Этот прибор состоит из тороидальной эвакуированной камеры, помещающейся между полюсами электромагнита специальной формы (рис. 10.15). Обмотка электромагнита питается переменным током с частотой порядка 100 Гц. Возникающее при этом переменное магнитное поле выполняет две функции: во-первых, создает вихревое электрическое поле, ускоряющее электроны, и, во-вторых, удерживает электроны на орбите, совпадающей с осью камеры.

Чтобы удержать электрон на орбите постоянного радиуса, можно по мере возрастания его скорости увеличивать магнитную индукцию поля (согласно формуле (10.2) радиус орбиты пропорционален v/B). Поэтому для ускорения могут быть использованы только 2-я и 4-я четверти периода тока, в начале которых ток в обмотке магнита равен нулю. Таким образом, бетатрон работает в импульсном режиме. В начале импульса в камеру подается из электронной пушки пучок электронов, который подхватывается вихревым электрическим полем и начинает со все возрастающей скоростью двигаться по круговой орбите. За время нарастания магнитного поля $\sim 10^{-3}$ с электроны успевают сделать до миллиона оборотов и приобретают энергию, которая может достигать нескольких сотен мегаэлектронвольт. При такой энергии скорость электронов почти равна скорости света c.

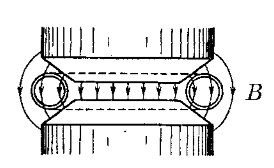


Рис. 10.15

Для того чтобы ускоряемый электрон двигался по круговой орбите радиуса r_0, между магнитной индукцией поля на орбите и внутри нее должно выполняться простое соотношение, которое мы сейчас выведем. Вихревое электрическое поле направлено по касательной к орбите, по которой движется электрон. Следовательно, циркуляция вектора **E** по этой орбите равна $2\pi r_0 E$. Вместе с тем согласно (9.28) циркуляция вектора **E** равна $-d\Phi/dt$, где Φ — магнитный поток через поверхность, охватываемую орбитой. Знак минус указывает направление **E**. Нас будет интересовать лишь модуль напряженности поля, поэтому

знак минус мы опустим. Приравняв оба выражения для циркуляции, найдем, что

$$E = \frac{1}{2\pi r_0}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Магнитное поле перпендикулярно к плоскости орбиты. Поэтому можно положить $\Phi = \pi r_0^2 \langle B \rangle$, где $\langle B \rangle$ — среднее по площади орбиты значение магнитной индукции. Тогда имеем

$$E = \frac{1}{2\pi r_0}\frac{d}{dt}(\pi r_0^2 \langle B \rangle) = \frac{r_0}{2}\frac{d}{dt}\langle B \rangle. \tag{10.32}$$

Напишем релятивистское уравнение движения электрона по орбите:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = -e\mathbf{E} - e[\mathbf{v}\mathbf{B}_{\text{орб}}] \tag{10.33}$$

($\mathbf{B}_{\text{орб}}$ — магнитная индукция поля на орбите).

Скорость электрона, движущегося по окружности радиуса r_0, можно представить в виде $\mathbf{v} = \omega r_0 \boldsymbol{\tau}$, где ω — скорость, с которой поворачивается радиус-вектор электрона, $\boldsymbol{\tau}$ — орт касательной к орбите в той точке, где находится электрон. Вектор $\mathbf{E}$ можно представить в виде

$$\mathbf{E} = E\boldsymbol{\tau} = \frac{r_0}{2}\frac{d}{dt}\langle B \rangle \cdot \boldsymbol{\tau}$$

(см. (10.32)). Наконец, произведение $[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ можно представить в виде $vB\mathbf{n} = \omega r_0 B\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — орт нормали к орбите в той точке, где находится электрон. С учетом сказанного напишем уравнение (10.33) следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\omega r_0 \boldsymbol{\tau}}{\sqrt{1 - \omega^2 r_0^2/c^2}}\right) = -\frac{e r_0}{2}\frac{d}{dt}\langle B \rangle \cdot \boldsymbol{\tau} - e\omega r_0 B_{\text{орб}} \cdot \mathbf{n}. \tag{10.34}$$

Производная по времени орта $\boldsymbol{\tau}$ равна $\dot{\boldsymbol{\tau}} = \omega\mathbf{n}$ (см. формулу (1.56) кн. 1; угловая скорость вращения орта совпадает с угловой скоростью радиуса-вектора электрона). Следовательно, произведя дифференцирование в левой ча-

сти уравнения (10.34), придем к равенству

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\omega r_0}{\sqrt{1-\omega^2 r_0^2/c^2}}\right)\cdot\boldsymbol{\tau}+\frac{m\omega r_0}{\sqrt{1-\omega^2 r_0^2/c^2}}\omega\cdot\mathbf{n}=$$
$$=-\frac{er_0}{2}\frac{d}{dt}\langle B\rangle\cdot\boldsymbol{\tau}-e\omega r_0 B_{\text{орб}}\cdot\mathbf{n}.$$

Приравняв множители при аналогичных ортах в левой и правой частях равенства, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\omega r_0}{\sqrt{1-\omega^2 r_0^2/c^2}}\right)=-\frac{er_0}{2}\frac{d}{dt}\langle B\rangle, \qquad (10.35)$$

$$\frac{m\omega r_0}{\sqrt{1-\omega^2 r_0^2/c^2}}=-er_0 B_{\text{орб}}. \qquad (10.36)$$

Из (10.35) следует, что

$$\frac{m\omega r_0}{\sqrt{1-\omega^2 r_0^2/c^2}}=-\frac{er_0}{2}\langle B\rangle \qquad (10.37)$$

(ω и $\langle B\rangle$ в начале импульса равны нулю).

Сопоставление выражений (10.36) и (10.37) приводит к искомому соотношению

$$B_{\text{орб}}=\frac{1}{2}\langle B\rangle.$$

Таким образом, для того чтобы электрон все время двигался по круговой орбите, магнитная индукция на орбите должна составлять половину среднего значения магнитной индукции внутри орбиты. Это достигается за счет изготовления полюсных наконечников в виде усеченных конусов (см. рис. 10.15).

В конце цикла ускорения включается дополнительное магнитное поле, которое отклоняет ускоренные электроны от стационарной орбиты и направляет их на специальную мишень, расположенную внутри камеры. Попадая на мишень, электроны испускают жесткое электромагнитное изучение (γ-лучи, рентгеновские лучи).

Применяются бетатроны главным образом в ядерных исследованиях. Небольшие ускорители (на энергию до 50 МэВ) нашли применение в промышленности как источники очень жесткого рентгеновского излучения, используемого для дефектоскопии массивных изделий.

Циклотрон [7]). В основу называемого так ускорителя положена независимость периода обращения заряженной частицы в однородном магнитном поле от ее скорости (см. (10.3)). Этот прибор состоит из двух электродов в виде половинок круглой невысокой коробки (рис. 10.16), получивших название дуантов. Дуанты заключены в откачиваемый корпус, который помещается между полюсами большого электромагнита. Поле, создаваемое электромагнитом, однородно и перпендикулярно к плоскости дуантов. На дуанты подается переменное напряжение, возбуждаемое генератором высокой частоты.

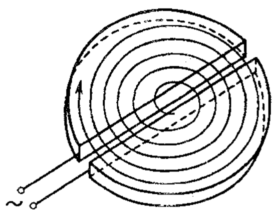


Рис. 10.16

Введем в зазор между дуантами в тот момент, когда напряжение достигнет наибольшего значения, заряженную частицу. Частица будет подхвачена электрическим полем и втянута внутрь одного из дуантов. Пространство внутри дуанта является эквипотенциальным, поэтому частица в нем будет находиться под действием только магнитного поля. В этом случае частица движется по окружности, радиус которой пропорционален скорости частицы (см. (10.2)). Подберем частоту изменения напряжения между дуантами так, чтобы к моменту, когда частица, пройдя половину окружности, подойдет к зазору между дуантами, разность потенциалов между ними изменила знак и достигла амплитудного значения. Тогда частица будет снова ускорена и влетит во второй дуант с энергией, в два раза большей, чем та, с которой она двигалась в первом дуанте. Обладая большей скоростью, частица будет двигаться во втором дуанте по окружности большего радиуса ($R \sim v$), но время, за которое она пройдет половину окружности, останется прежним. Поэтому к моменту, когда частица влетит в зазор между дуантами, напряжение между ними снова изменит свой знак и примет амплитудное значение.

Таким образом, частица движется по кривой, близкой к спирали, получая при каждом прохождении через зазор между дуантами дополнительную порцию энергии, равную $e'U_{\mathrm{m}}$ (e' — заряд частицы, U_{m} — амплитуда напряжения,

---

[7]) Создателем циклотрона является американский физик Эрнест Орландо Лоуренс (1901–1958).

вырабатываемого генератором). Располагая источником переменного напряжения сравнительно небольшой величины ($U_{\mathrm{m}} \sim 10^5$ В), можно с помощью циклотрона ускорить протоны до энергий порядка 25 МэВ. При более высоких энергиях начинает сказываться зависимость периода обращения частицы от ее скорости (см. формулу (10.7)) — период обращение увеличивается и синхронизм между движением частиц и изменениями ускоряющего поля оказывается нарушенным. (При энергии 25 МэВ период обращения увеличивается на 2,5% по сравнению с первоначальным.)

Чтобы избежать нарушения синхронизма и получить частицы больших энергий, делают изменяющейся либо частоту напряжения, питающего дуанты, либо индукцию магнитного поля. Прибор, в котором в процессе ускорения каждой порции частиц соответствующим образом уменьшается частота ускоряющего напряжения, называется фазотроном (либо синхроциклотроном). Ускоритель, в котором частота остается постоянной, а индукция магнитного поля изменяется так, чтобы отношение m/B было постоянным, называют синхротроном (ускорители этого типа применяются только для ускорения электронов).

В ускорителе, называемом синхрофазотроном или протонным синхротроном, изменяются и частота ускоряющего напряжения, и индукция магнитного поля. Ускоряемые частицы движутся в синхрофазотроне не по спирали, а по круговой траектории. По мере увеличения скорости частиц индукция магнитного поля растет так, чтобы определяемый формулой (10.6) радиус оставался постоянным. При этом период обращения изменяется как из-за возрастания скорости частиц, так и вследствие увеличения B. Для того чтобы ускоряющее напряжение было синхронно с движением частиц, частота этого напряжения делается изменяющейся по соответствующему закону. Дуантов в синхрофазотроне нет, ускорение частиц происходит на отдельных участках траектории с помощью электрического поля, создаваемого генераторами напряжения меняющейся частоты.

Глава 11

Классическая теория электропроводности металлов

11.1. Природа носителей тока в металлах

Для выяснения природы носителей тока в металлах был поставлен ряд опытов. Прежде всего отметим опыт Рикке, осуществленный в 1901 г. Рикке[1]) взял три цилиндра — два медных и один алюминиевый — с тщательно отшлифованными торцами. После взвешивания цилиндры были сложены вместе в последовательности: медь–алюминий–медь. Через такой составной проводник пропускался непрерывно ток одного и того же направления в течение года. За все время через цилиндры прошел заряд, равный $3,5 \cdot 10^6$ Кл. Взвешивание показало, что пропускание тока не оказало на массу цилиндров никакого влияния. При исследовании соприкасавшихся торцов под микроскопом не было обнаружено проникновения одного металла в другой. Результаты опыта свидетельствовали о том, что перенос заряда в металлах осуществляется не атомами, а какими-то частицами, входящими в состав всех металлов. Такими частицами могли быть открытые в 1897 г. Томсоном электроны.

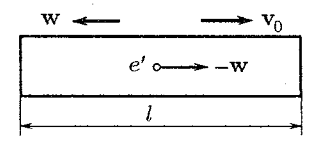


Рис. 11.1

Чтобы отождествить носители тока в металлах с электронами, нужно было определить знак и числовое значение удельного заряда носителей. Х. А. Лоренц предложил опыт, основывающийся на следующих соображениях. Если в металлах имеются способные перемещаться заряженные частицы, то при торможении металлического проводника эти частицы должны некоторое время продолжать двигаться по инерции, в результате чего в проводнике возникнет импульс тока и будет перенесен некоторый заряд.

---

[1]) Карл Виктор Эдуард Рикке (1845–1915) — немецкий физик.

Пусть проводник движется вначале со скоростью $\mathbf{v}_0$ (рис. 11.1). Начнем тормозить его с ускорением $\mathbf{w}$. Продолжая двигаться по инерции, носители тока приобретут относительно проводника ускорение $-\mathbf{w}$. Такое же ускорение можно сообщить носителям в неподвижном проводнике, если создать в нем электрическое поле напряженности $\mathbf{E} = -m\mathbf{w}/e'$, т. е. приложить к концам проводника разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_1^2 \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\int\limits_1^2 \frac{m\mathbf{w}}{e'}\,d\mathbf{l} = -\frac{mwl}{e'}$$

(m и e' — масса и заряд носителя, l — длина проводника).

В этом случае по проводнику потечет ток силы $I = (\varphi_1 - \varphi_2)/R$, где R — сопротивление проводника (I считается положительной, если ток течет в направлении движения проводника). Следовательно, за время dt через каждое сечение проводника пройдет заряд

$$dq = I\,dl = -\frac{mwl}{e'R}\,dt = -\frac{ml}{e'R}\,dv.$$

Заряд, прошедший за все время торможения, равен

$$q = \int dq = -\int\limits_{v_0}^{0} \frac{ml}{e'R}\,dv = \frac{m}{e'}\frac{lv_0}{R} \qquad (11.1)$$

(заряд положителен, если он переносится в направлении движения проводника).

Таким образом, измерив l, v_0 и R, а также заряд q, проходящий по цепи при торможении проводника, можно найти удельный заряд носителей. Направление импульса тока даст знак носителей.

Опыт был поставлен Толменом[2]) и Стюартом в 1916 г. Катушка из провода длиной 500 м приводилась во вращение, при котором линейная скорость витков составляла 300 м/с. Затем катушка резко тормозилась и с помощью баллистического гальванометра измерялся заряд, протекавший в цепи за время торможения. Вычисленное по

[2]) Ричард Чейс Толмен (1881–1948) — американский физик.

формуле (11.1) значение удельного заряда носителей получалось очень близким к e/m для электронов. Таким образом, было экспериментально доказано, что носителями тока в металлах являются электроны[3]).

Ток в металлах можно вызвать крайне малой разностью потенциалов. Это дает основание считать, что носители тока — электроны — перемещаются по металлу практически свободно. К тому же выводу приводят и результаты опыта Толмена и Стюарта.

Существование в металлах свободных электронов можно объяснить тем, что при образовании кристаллической решетки от атомов металла отщепляются слабее всего связанные (валентные) электроны, которые становятся «коллективной» собственностью всего куска металла. Если от каждого атома отщепится по одному электрону, то концентрация свободных электронов (т. е. их число n в единице объема) будет равна числу атомов в единице объема. Число атомов в единице объема равно $(\delta/M)N_\text{А}$, где δ — плотность металла, M — масса моля, $N_\text{А}$ — постоянная Авогадро. Для металлов значения δ/M заключены в пределах от $2 \cdot 10^4$ (для калия) до $2 \cdot 10^5$ моль/м^3 (для бериллия). Следовательно, для концентрации свободных электронов (или, как их еще называют, электронов проводимости) получаются значения порядка

$$n = 10^{28} \div 10^{29}\ \text{м}^{-3}\ (10^{22} \div 10^{23}\ \text{см}^{-3}). \qquad (11.2)$$

11.2. Элементарная классическая теория металлов

Исходя из представлений о свободных электронах Друде[4]) создал классическую теорию металлов, которая затем была усовершенствована Лоренцем. Друде предположил, что электроны проводимости в металле ведут себя подобно молекулам идеального газа. В промежутках между соударениями они движутся совершенно свободно, пробегая в среднем некоторый путь λ. Правда, в отличие от

[3]) В 1913 г. русские физики Леонид Исаакович Мандельштам (1879–1944) и Николай Дмитриевич Папалекси (1880–1947) осуществили качественный опыт. Приведя катушку из проволоки в крутильные колебания, они слышали шум в подключенных к катушке наушниках. Результаты опыта не были опубликованы.

[4]) Пауль Карл Людвиг Друде (1863–1906) — немецкий физик.

молекул газа, пробег которых определяется соударениями молекул друг с другом, электроны сталкиваются преимущественно не между собой, а с ионами, образующими кристаллическую решетку металла. Эти столкновения приводят к установлению теплового равновесия между электронным газом и кристаллической решеткой.

Полагая, что на электронный газ могут быть распространены результаты кинетической теории газов, оценку средней скорости теплового движения электронов можно произвести по формуле

$$\langle v\rangle = \sqrt{8kT/\pi m} \tag{11.3}$$

(см. формулу (2.65) кн. 3). Для комнатной температуры (~ 300 К) вычисление по этой формуле приводит к следующему значению:

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8\cdot 1,38\cdot 10^{-23}\cdot 300}{3,14\cdot 0,91\cdot 10^{-30}}}\ \text{м/с} \approx 10^5\ \text{м/с}.$$

При включении поля на хаотическое тепловое движение, происходящее со скоростью $\langle v\rangle$, накладывается упорядоченное движение электронов с некоторой средней скоростью $\langle u\rangle$. Значение этой скорости легко оценить исходя из формулы

$$j = ne\langle u\rangle \tag{11.4}$$

(см. (5.22)). Предельная допустимая техническими нормами плотность тока для медных проводов составляет около 10^7 А/м^2 (10 А/мм^2). Взяв для n значение 10^{29} м$^{-3}$, получим

$$\langle u\rangle = \frac{j}{en} \approx \frac{10^7}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{29}}\ \text{м/с} \approx 10^{-3}\ \text{м/с}.$$

Таким образом, даже при очень больших плотностях тока средняя скорость упорядоченного движения зарядов $\langle u\rangle$ примерно в 10^8 раз меньше средней скорости теплового движения $\langle v\rangle$. Поэтому при вычислениях модуль результирующей скорости $|\mathbf{v}+\mathbf{u}|$ можно заменять модулем скорости теплового движения $|\mathbf{v}|$.

Найдем вызываемое полем изменение среднего значения кинетической энергии электронов. Средний квадрат результирующей скорости равен

$$\langle(\mathbf{v}+\mathbf{u})^2\rangle = \langle\mathbf{v}^2 + 2\mathbf{vu} + \mathbf{u}^2\rangle = \langle\mathbf{v}^2\rangle + 2\langle\mathbf{vu}\rangle + \langle\mathbf{u}^2\rangle. \tag{11.5}$$

Два события, заключающиеся в том, что скорость теплового движения электрона примет значение $\mathbf{v}$, а скорость упорядоченного движения — значение $\mathbf{u}$, являются статистически независимыми. Поэтому согласно теореме об умножении вероятностей (см. формулу (2.4) кн. 3) $\langle \mathbf{vu} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle$. Но $\langle \mathbf{v} \rangle$ равно нулю, так что второе слагаемое в (11.5) исчезает и формула принимает вид

$$\langle (\mathbf{v} + \mathbf{u})^2 \rangle = \langle \mathbf{v}^2 \rangle + \langle \mathbf{u}^2 \rangle.$$

Отсюда вытекает, что упорядоченное движение увеличивает кинетическую энергию электронов в среднем на

$$\langle \Delta \varepsilon_{\text{к}} \rangle = \frac{m \langle u^2 \rangle}{2}. \tag{11.6}$$

Закон Ома. Друде считал, что при соударении электрона с ионом кристаллической решетки приобретенная электроном дополнительная энергия (11.6) передается иону и, следовательно, скорость u в результате соударения равной нулю. Предположим, что поле, ускоряющее электроны, однородно. Тогда под действием поля электрон получит постоянное ускорение, равное eE/m, и к концу пробега скорость упорядоченного движения достигнет в среднем значения

$$u_{\max} = \frac{eE}{m} \tau, \tag{11.7}$$

где τ — среднее время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами решетки.

Друде не учитывал распределения электронов по скоростям и приписывал всем электронам одинаковое значение скорости v. В этом приближении

$$\tau = \lambda / v$$

(напомним, что $|\mathbf{v} + \mathbf{u}|$ практически равен $|\mathbf{v}|$). Подставив это значение τ в формулу (11.7), получим

$$u_{\max} = \frac{eE\lambda}{mv}. \tag{11.8}$$

Скорость u изменяется за время пробега линейно. Поэтому ее среднее за пробег значение равно половине максимального:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} u_{\max} = \frac{eE\lambda}{2mv}.$$

Подстановка этого выражения в формулу (11.4) дает

$$j = \frac{ne^2\lambda}{2mv}E.$$

Плотность тока оказалась пропорциональной напряженности поля — мы пришли к закону Ома. Согласно (5.22) коэффициент пропорциональности между j и E есть проводимость

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2mv}. \tag{11.9}$$

Если бы электроны не сталкивались с ионами решетки, длина свободного пробега, а следовательно, и проводимость были бы бесконечно велики. Таким образом, согласно классическим представлениям электрическое сопротивление металлов обусловлено соударениями свободных электронов с ионами, помещающимися в узлах кристаллической решетки металла.

Закон Джоуля–Ленца. К концу свободного пробега электрон приобретает дополнительную кинетическую энергию, среднее значение которой равно

$$\langle\Delta\varepsilon_{\text{к}}\rangle = \frac{mu_{\max}^2}{2} = \frac{e^2\lambda^2}{2mv^2}E^2 \tag{11.10}$$

(см. формулы (11.6) и (11.8)). Столкнувшись с ионом, электрон, по предположению, полностью передает приобретенную энергию решетке. Сообщенная решетке энергия идет на увеличение внутренней энергии металла, проявляющееся в его нагревании.

Каждый электрон претерпевает за секунду в среднем $1/\tau = v/\lambda$ соударений, сообщая всякий раз решетке энергию (11.10). Поэтому в единице объема за единицу времени должна выделяться теплота

$$Q_{\text{уд}} = n\frac{1}{\tau}\langle\Delta\varepsilon_{\text{к}}\rangle = \frac{ne^2\lambda}{2mv}E^2$$

(n — число электронов проводимости в единице объема).

Величина $Q_{\text{уд}}$ есть удельная тепловая мощность тока (см. § 5.8). Множитель при E^2 совпадает со значением (11.9) для σ. Перейдя в выражении σE^2 от σ и E к ρ и j, придем к формуле $Q_{\text{уд}} = \rho j^2$, выражающей закон Джоуля–Ленца (см. формулу (5.39)).

Закон Видемана–Франца. Из опыта известно, что наряду с высокой электропроводностью металлы отличаются также большой теплопроводностью. Видеман[5]) и Франц установили в 1853 г. эмпирический закон, согласно которому отношение теплопроводности κ к электропроводности σ для всех металлов приблизительно одинаково и изменяется пропорционально термодинамической температуре. Например, для алюминия при комнатной температуре это отношение равно $5,8 \cdot 10^{-6}$, для меди $6,4 \cdot 10^{-6}$ и для свинца $7,0 \cdot 10^{-6}$ Дж·Ом/(с·К).

Способностью проводить тепло обладают и неметаллические кристаллы. Однако теплопроводность металлов значительно превосходит теплопроводность диэлектриков. Из этого следует, что теплопередача в металлах осуществляется в основном не кристаллической решеткой, а свободными электронами. Рассматривая эти электроны как одноатомный газ, можно заимствовать для теплопроводности выражение кинетической теории газов:

$$\kappa = \frac{1}{3} n m v \lambda c_V$$

(см. формулу (7.26) кн. 3); ρ заменено произведением nm, вместо $\langle v \rangle$ взято v). Удельная теплоемкость одноатомного газа равна $c_V = (3/2)(R/M) = (3/2)(k/m)$. Подставив это значение в выражение для κ, получим

$$\kappa = \frac{1}{2} n k v \lambda.$$

Разделив κ на выражение (11.9) для σ и заменив затем $(1/2)mv^2$ на $(3/2)kT$, придем к соотношению

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{kmv^2}{e^2} = 3\left(\frac{k}{e}\right)^2 T, \qquad (11.11)$$

которое выражает закон Видемана–Франца.

Подстановка в (11.11) числовых значений k и e дает

$$\frac{\kappa}{\sigma} = 2,23 \cdot 10^{-8}\, T.$$

При $T = 300$ К для κ/σ получается значение $6,7 \times \times 10^{-6}$ Дж·Ом/(с·К), хорошо согласующееся с экспериментальными данными (см. приведенные выше значения

[5]) Густав Генрих Видеман (1826–1899) — немецкий физик.

κ/σ для Al, Cu и Pb). Однако впоследствии выяснилось, что столь хорошее совпадение оказалось случайным, ибо когда Лоренц уточнил расчеты, учтя распределение электронов по скоростям, для отношения κ/σ получилось значение $2(k/e)^2T$, которое хуже согласуется с данными опыта.

Итак, классическая теория смогла объяснить законы Ома и Джоуля–Ленца, а также дала качественное объяснение закона Видемана–Франца. Вместе с тем эта теория встретилась с весьма существенными затруднениями. Из них основными являются два. Из формулы (11.9) вытекает, что сопротивление металлов (т.е. величина, обратная σ) должно возрастать как корень квадратный из T. Действительно, для предположения о зависимости величин n и λ от температуры нет никаких оснований. Скорость же теплового движения пропорциональна корню из T. Этот вывод теории противоречит опытным данным, согласно которым электрическое сопротивление металлов растет пропорционально первой степени T, т. е. быстрее, чем $\sqrt{T}$ (см. формулу (5.24)).

Вторoе затруднение классической теории заключается в том, что электронный газ должен обладать молярной теплоемкостью, равной $(3/2)R$. Добавив эту величину к теплоемкости решетки, составляющей $3R$ (см. формулу (4.1) кн. 3), получим для молярной теплоемкости металла значение $(9/2)R$. Таким образом, согласно классической электронной теории молярная теплоемкость металлов должна быть в 1,5 раза больше, чем у диэлектриков. В действительности же теплоемкость металлов не отличается заметно от теплоемкости неметаллических кристаллов. Объяснение такого несоответствия смогла дать лишь квантовая теория металлов.

Отметим, что классическая теория не могла объяснить самого главного — почему электроны в металлах оказываются свободными.

11.3. Эффект Холла[6])

Если металлическую пластинку, вдоль которой течет постоянный электрический ток, поместить в перпендикулярное к ней магнитное поле, то между гранями, парал-

[6]) Эдвин Герберт Холл (1855–1938) — американский физик.

лельными направлениям тока и поля, возникает разность потенциалов $U_H = \varphi_1 - \varphi_2$ (рис. 11.2). Это явление было обнаружено Холлом в 1879 г. и называется эффектом Холла или гальваномагнитным явлением.

Холловская разность потенциалов определяется выражением

$$U_H = RbjB. \tag{11.12}$$

Здесь b — ширина пластинки, j — плотность тока, B — магнитная индукция поля, R — коэффициент пропорциональности, получивший название постоянной Холла.

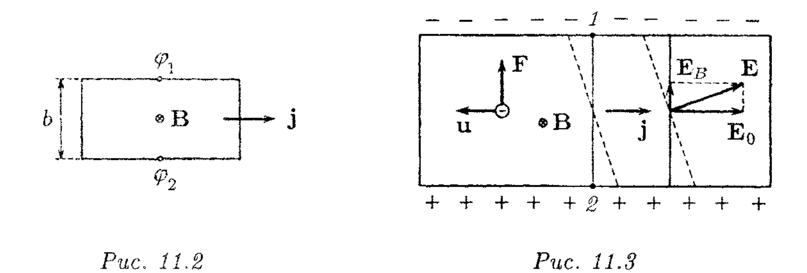


Рис. 11.2 *Рис. 11.3*

Эффект Холла очень просто объясняется электронной теорией. В отсутствие магнитного поля ток в пластинке обусловливается электрическим полем $\mathbf{E}_0$ (рис. 11.3). Эквипотенциальные поверхности этого поля образуют систему перпендикулярных к вектору $\mathbf{E}_0$ плоскостей. Две из них изображены на рисунке сплошными прямыми линиями. Потенциал во всех точках каждой поверхности, а следовательно, и в точках *1* и *2* одинаков. Носители тока — электроны — имеют отрицательный заряд, поэтому скорость их упорядоченного движения $\mathbf{u}$ направлена противоположно вектору плотности тока $\mathbf{j}$.

При включении магнитного поля каждый носитель оказывается под действием магнитной силы $\mathbf{F}$, направленной вдоль стороны b пластинки и равной по модулю

$$F = euB. \tag{11.13}$$

В результате у электронов появляется составляющая скорости, направленная к верхней (на рисунке) грани пластинки. У этой грани образуется избыток отрицательных, соответственно у нижней грани — избыток положительных зарядов. Следовательно, возникает дополнительное поперечное электрическое поле $\mathbf{E}_B$. Когда напряженность

этого поля достигает такого значения, что его действие на заряды будет уравновешивать силу (11.13), установится стационарное распределение зарядов в поперечном направлении. Соответствующее значение E_B определяется условием $eE_B = euB$. Отсюда

$$E_B = uB.$$

Поле $\mathbf{E}_B$ складывается с полем $\mathbf{E}_0$ в результирующее поле $\mathbf{E}$. Эквипотенциальные поверхности перпендикулярны к вектору напряженности поля. Следовательно, они повернутся и займут положение, изображенное на рис. 11.3 штриховыми линиями. Точки *1* и *2*, которые прежде лежали на одной и той же эквипотенциальной поверхности, теперь имеют разные потенциалы. Чтобы найти напряжение, возникающее между этими точками, нужно умножить расстояние между ними b на напряженность E_B:

$$U_\text{H} = bE_B = buB.$$

Выразим u через j, n и e в соответствии с формулой $j = neu$. В результате получим

$$U_\text{H} = \frac{1}{ne} bjB. \tag{11.14}$$

Последнее выражение совпадает с (11.12), если положить

$$R = \frac{1}{ne}. \tag{11.15}$$

Из (11.15) следует, что, измерив постоянную Холла, можно найти концентрацию носителей тока в данном металле (т. е. число носителей в единице объема).

Важной характеристикой вещества является подвижность в нем носителей тока. Подвижностью носителей тока называется средняя скорость, приобретаемая носителями при напряженности электрического поля, равной единице. Если в поле напряженности E носители приобретают скорость u, то подвижность их u_0 равна

$$u_0 = \frac{u}{E}. \tag{11.16}$$

Подвижность можно связать с проводимостью σ и концентрацией носителей n. Для этого разделим соотношение $j = neu$ на напряженность поля E. Приняв во внимание, что отношение j к E дает σ, а отношение u к E — подвижность, получим

$$\sigma = neu_0. \tag{11.17}$$

Измерив постоянную Холла R и проводимость σ, можно по формулам (11.16) и (11.17) найти концентрацию и подвижность носителей тока в соответствующем образце.

Эффект Холла наблюдается не только в металлах, но и в полупроводниках, причем по знаку эффекта можно судить о принадлежности полупроводника к n- или p-типу [7]).

На рис. 11.4 сопоставлен эффект Холла для образцов с положительными и отрицательными носителями. Направление магнитной силы изменяется на противоположное

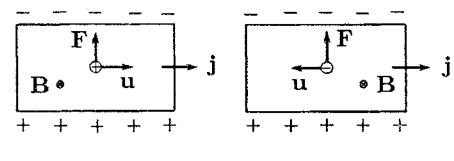


Рис. 11.4

как при изменении направления движения заряда, так и при изменении его знака. Следовательно, при одинаковом направлении тока и поля магнитная сила, действующая на положительные и отрицательные носители, имеет одинаковое направление. Поэтому в случае положительных носителей потенциал верхней (на рисунке) грани выше, чем нижней, а в случае отрицательных носителей — ниже. Таким образом, определив знак холловской разности потенциалов, можно установить знак носителей тока.

Любопытно, что у некоторых металлов знак U_H соответствует положительным носителям тока. Объяснение этой аномалии дает квантовая теория.

---

[7]) В полупроводниках n-типа знак носителей тока отрицателен, а в полупроводниках p-типа — положителен (см. кн. 5).

Глава 12

Электрический ток в газах

12.1. Несамостоятельная и самостоятельная проводимости

Прохождение электрического тока через газы называется газовым разрядом. Газы в нормальном состоянии являются изоляторами, носители тока в них отсутствуют. Лишь при создании особых условий в газах могут появиться носители тока (ионы, электроны) и возникает электрический разряд.

Носители тока в газах могут возникать в результате внешних воздействий, не связанных с наличием электрического поля. В этом случае говорят о несамостоятельной проводимости газа. Несамостоятельный разряд может быть вызван нагреванием газа (термическая ионизация), воздействием ультрафиолетовых или рентгеновских лучей, а также воздействием излучения радиоактивных веществ.

Если носители тока возникают в результате процессов, обусловленных созданным в газе электрическим полем, проводимость называется самостоятельной.

Характер газового разряда зависит от многих факторов: от химической природы газа и электродов, от температуры и давления газа, от формы, размеров и взаимного расположения электродов, от напряжения, приложенного к электродам, от плотности и мощности тока и т. д. Поэтому газовый разряд может принимать весьма разнообразные формы. Некоторые виды разряда сопровождаются свечением и звуковыми эффектами — шипением, шорохами или треском.

12.2. Несамостоятельный газовый разряд

Пусть газ, находящийся между электродами (рис. 12.1), подвергается непрерывному постоянному по интенсивности воздействию какого-либо ионизирующего агента (на-

пример, рентгеновских лучей). Действие ионизатора приводит к тому, что от некоторых молекул газа отщепляется один или несколько электронов, в результате чего эти молекулы превращаются в положительно заряженные ионы. При не очень низких давлениях отщепившиеся электроны обычно захватываются нейтральными молекулами, которые таким образом становятся отрицательно заряженными ионами. Число пар ионов, возникающих под действием ионизатора за секунду в единице объема, обозначим через Δn_i.

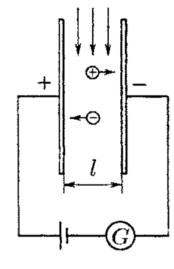


Рис. 12.1

Наряду с процессом ионизации в газе происходит р е к о м б и н а ц и я ионов, т. е. нейтрализация разноименных ионов при их встрече или воссоединение положительного иона и электрона в нейтральную молекулу. Вероятность встречи двух ионов разных знаков пропорциональна как числу положительных, так и числу отрицательных ионов. Поэтому количество рекомбинирующих за секунду в единице объема пар ионов Δn_r пропорционально квадрату числа имеющихся в единице объема пар ионов n:

$$\Delta n_r = rn^2 \tag{12.1}$$

(r — коэффициент пропорциональности).

В состоянии равновесия число возникающих ионов равно числу рекомбинирующих, следовательно,

$$\Delta n_i = rn^2. \tag{12.2}$$

Отсюда для равновесной концентрации ионов (числа пар ионов в единице объема) получается следующее выражение:

$$n = \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}. \tag{12.3}$$

Под действием космического излучения и следов радиоактивных веществ, имеющихся в земной коре, в 1 см^3 атмосферного воздуха возникает в среднем несколько пар ионов в секунду. Коэффициент r для воздуха равен $1,6\times$ $\times 10^{-6}$ см^3/с. Подстановка этих чисел в формулу (12.3) дает для равновесной концентрации ионов в воздухе значение порядка 10^3 см$^{-3}$. Эта концентрация недостаточна

для того, чтобы обусловить заметную проводимость. Чистый сухой воздух является очень хорошим изолятором.

Если подать напряжение на электроды, то убыль ионов будет происходить не только вследствие рекомбинации, но и за счет отсасывания ионов полем к электродам. Пусть из единицы объема отсасывается ежесекундно Δn_j пар ионов. Если заряд каждого иона e', то нейтрализация на электродах одной пары ионов сопровождается переносом по цепи заряда e'. Каждую секунду электродов достигает $\Delta n_j Sl$ пар ионов (S — площадь электродов, l — расстояние между ними; произведение Sl равно объему межэлектродного пространства). Следовательно, сила тока в цепи равна

$$I = e'\Delta n_j Sl.$$

Отсюда

$$\Delta n_j = \frac{I}{e'lS} = \frac{j}{e'l}, \tag{12.4}$$

где j — плотность тока.

При наличии тока условие равновесия выглядит следующим образом:

$$\Delta n_i = \Delta n_r + \Delta n_j.$$

Подставив сюда выражения (12.1) и (12.4) для Δn_r и Δn_j, придем к соотношению

$$\Delta n_i = rn^2 + \frac{j}{e'l}. \tag{12.5}$$

Плотность тока определяется выражением

$$j = e'n(u_0^+ + u_0^-)E, \tag{12.6}$$

где u_0^+ и u_0^- — подвижности положительных и отрицательных ионов (см. формулу (11.16)).

Рассмотрим два предельных случая — случай слабых и случай сильных полей.

В случае слабых полей плотность тока будет очень мала, и слагаемым $j/(e'l)$ в соотношении (12.5) можно пренебречь по сравнению с rn^2 (это означает, что убыль ионов из межэлектродного пространства происходит в основном за счет рекомбинации). Тогда (12.5) переходит в (12.2), и

для равновесной концентрации ионов получается выражение (12.3). Подстановка этого значения n в формулу (12.6) дает

$$j = e'\sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}(u_0^+ + u_0^-)E. \tag{12.7}$$

Множитель при E в полученной формуле не зависит от напряженности поля. Следовательно, в случае слабых полей несамостоятельный газовый разряд подчиняется закону Ома.

Подвижность ионов в газах имеет значение порядка $10^{-4}(\text{м}\cdot\text{с}^{-1})/(\text{В}\cdot\text{м}^{-1})$ $(1(\text{см}\cdot\text{с}^{-1})/(\text{В}\cdot\text{см}^{-1}))$. Следовательно, при равновесной концентрации $n = 10^3$ см$^{-3}$ $=$ $= 10^9$ м$^{-3}$ и напряженности поля $E = 1$ В/м плотность тока составит

$$j = 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 10^9(10^{-4}+10^{-4})\cdot 1\ \text{А/м}^2 \sim$$
$$\sim 10^{-14}\ \text{А/м}^2 = 10^{-18}\ \text{А/см}^2$$

(см. формулу (12.6); ионы предполагаются однозарядными).

В случае сильных полей слагаемым rn^2 в формуле (12.5) можно пренебречь по сравнению с $j/(e'l)$. Это означает, что практически все возникающие ионы достигают электродов, не успев рекомбинировать. При этом условии соотношение (12.5) имеет вид

$$\Delta n_i = \frac{j}{e'l}.$$

Отсюда

$$j = e'\Delta n_i l. \tag{12.8}$$

Эта плотность тока создается всеми ионами, порождаемыми ионизатором в заключенном между электродами столбе газа с единичным поперечным сечением. Следовательно, эта плотность тока является наибольшей при данной интенсивности ионизатора и заданном расстоянии l между электродами. Ее называют плотностью тока насыщения $j_{\text{нас}}$.

Вычислим $j_{\text{нас}}$ при следующих условиях: $\Delta n_i =$ $= 10\,\text{см}^{-3}\cdot\text{с}^{-1} = 10^7\,\text{м}^{-3}\cdot\text{с}^{-1}$ (примерно такова скорость образования ионов в атмосферном воздухе при обычных условиях), $l = 0,1$ м. Подстановка этих данных в форму-

лу (12.8) дает

$$j_{\text{нас}} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{7} \cdot 10^{-1}\ \text{А/м}^2 \sim$$
$$\sim 10^{-13}\ \text{А/м}^2 = 10^{-17}\ \text{А/см}^2.$$

Этот расчет показывает, что проводимость воздуха в обычных условиях ничтожно мала. При промежуточных значениях E происходит плавный переход от линейной зависимости j от E к насыщению, по достижении которого j перестает зависеть от E (см. сплошную кривую на рис. 12.2). За областью насыщения лежит область резкого возрастания тока (см. показанный штриховой линией участок кривой). Это возрастание объясняется тем, что, начиная с некоторого значения E, порождаемые внешним ионизатором электроны[1]) успевают за время свободного пробега приобрести энергию, достаточную для того, чтобы, столкнувшись с молекулой, вызвать ее ионизацию. Возникшие при ионизации свободные электроны, разогнавшись, в свою очередь вызывают ионизацию. Так происходят лавинообразное размножение первичных ионов, созданных внешним ионизатором, и усиление разрядного тока. Процесс не утрачивает характера несамостоятельного разряда, так как после прекращения действия внешнего ионизатора разряд продолжается только до тех пор, пока все электроны (первичные и вторичные) не достигнут анода (задняя граница пространства, в котором имеются ионизирующие частицы — электроны, перемещается к аноду). Чтобы разряд стал самостоятельным, необходимо наличие двух встречных лавин ионов, что возможно только в том случае, если ионизацию ударом способны вызывать носители обоих знаков.

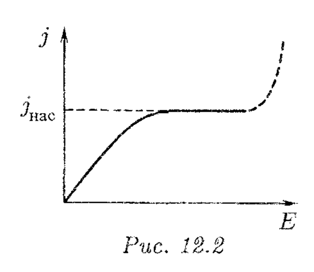


Рис. 12.2

Весьма важно, что несамостоятельные разрядные токи, усиленные за счет размножения носителей, пропорциональны числу первичных ионов, создаваемых внешним ионизатором. Это свойство разряда используется в пропорциональных счетчиках (см. следующий параграф).

[1]) Вследствие большей длины свободного пробега электроны раньше приобретают способность вызывать ионизацию ударом, чем газовые ионы.

12.3. Ионизационные камеры и счетчики

Ионизационные камеры и счетчики применяются для обнаружения и счета элементарных частиц, а также для измерения интенсивности рентгеновского и гамма-излучения. Действие этих приборов основано на использовании несамостоятельного газового разряда.

Принципиальные схемы ионизационной камеры и счетчика одинаковы (рис. 12.3). Различаются они только режимом работы и конструктивными особенностями. Счетчик (рис. 12.3*б*) состоит из цилиндрического корпуса, по

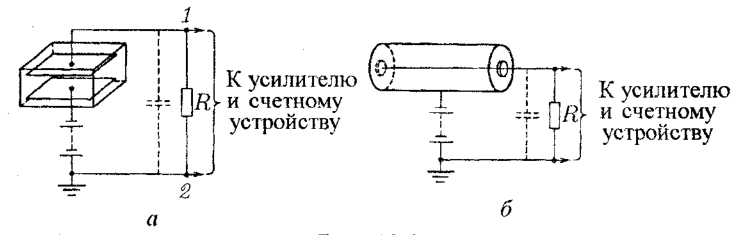


Рис. 12.3

оси которого натянута укрепленная на изоляторах тонкая нить (анод). Катодом служит корпус счетчика. Для впуска ионизирующих частиц в торце счетчика делается окошко из слюды или из алюминиевой фольги. Некоторые частицы, а также рентгеновское и гамма-излучение проникают в счетчик или ионизационную камеру непосредственно через их стенки. Ионизационная камера (рис. 12.3*а*) может иметь электроды разной формы. В частности, они могут быть такими же, как у счетчика, либо иметь форму плоских параллельных пластин и т. д.

Допустим, что в пространство между электродами влетает быстрая заряженная частица, которая создает N_0 пар первичных ионов (электронов и положительных ионов). Возникшие ионы увлекаются полем к электродам, вследствие чего через сопротивление R проходит некоторый заряд q, который мы будем называть импульсом тока. На рис. 12.4 приведена зависимость импульса тока q от напряжения U между электродами для двух различных количеств первичных ионов N_0, различающихся в три раза ($N_{02} = 3N_{01}$). На графике можно выделить шесть областей. Области I и II были рассмотрены в предыдущем параграфе. В частности, область II есть о б л а с т ь т о к а н а с ы щ е н и я — все созданные ионизирующей частицей

ионы достигают электродов, не успев рекомбинировать. Естественно, что при этом условии импульс тока не зависит от напряжения.

Начиная со значения U_p, напряженность поля оказывается достаточной для того, чтобы электроны могли ионизировать молекулы ударом. Поэтому количество электронов и положительных ионов лавинообразно растет. В результате на каждый из электродов попадает AN_0 ионов.

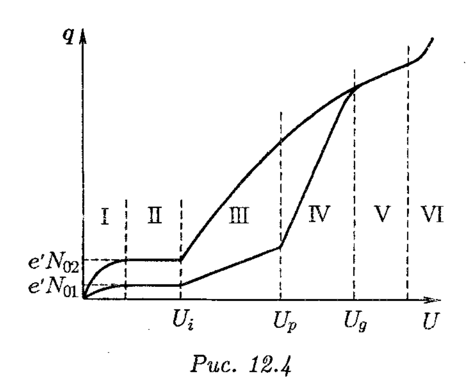


Рис. 12.4

Величина A называется коэффициентом газового усиления. В области III этот коэффициент не зависит от количества первичных ионов (но зависит от напряжения). Поэтому, если поддерживать напряжение постоянным, импульс тока будет пропорционален количеству первичных ионов. Область III называется, областью пропорциональности, а напряжение U_i — порогом пропорциональной области. Коэффициент газового усиления изменяется в этой области от 1 в начале до $10^3 \div 10^4$ в конце (рис. 12.4 выполнен без соблюдения масштаба по оси q; выдержано лишь соотношение 1:3 между ординатами кривых в областях II и III).

В области IV, называемой областью частичной пропорциональности, коэффициент газового усиления A все сильнее зависит от N_0, в связи с чем различие в импульсах тока, порожденных различным количеством первичных ионов, все больше сглаживается.

При напряжениях, соответствующих области V (ее называют областью Гейгера [2]), а напряжение U_g —

---

[2]) Ханс Гейгер (1882–1945) — немецкий физик.

порогом этой области), процесс приобретает характер самостоятельного разряда. Первичные ионы лишь создают толчок для его возникновения. Импульс тока в этой области совершенно не зависит от количества первичных ионов.

В области VI напряжение столь велико, что разряд, возникнув, не прекращается. Поэтому ее называют областью непрерывного разряда.

Ионизационные камеры. Ионизационной камерой называется прибор, работающий без газового усиления, т. е. при напряжениях, соответствующих области II. Существуют два типа ионизационных камер. Камеры одного типа применяются для регистрации импульсов, порождаемых отдельными частицами (импульсные камеры). Влетевшая в камеру частица создает в ней некоторое количество ионов, в результате чего через сопротивление R начинает течь ток I. Это приводит к тому, что потенциал точки *1* (см. рис. 12.3 *а*) повышается и становится равным IR (первоначально потенциал этой точки был такой же, как и заземленной точки *2*). Этот потенциал поступает на усилитель и после усиления приводит в действие счетное устройство. После того как все попавшие на внутренний электрод заряды пройдут через сопротивление R, ток прекратится и потенциал точки *1* снова станет равным нулю. Характер работы камеры зависит от длительности импульса тока, вызванного одной ионизирующей частицей. Чтобы выяснить, от чего зависит продолжительность импульса, рассмотрим цепь, состоящую из конденсатора C и сопротивления R (рис. 12.5). Если сообщить обкладкам конденсатора разноименные заряды $+q_0$ и $-q_0$, через сопротивление R потечет ток, вследствие чего заряды на обкладках будут убывать.

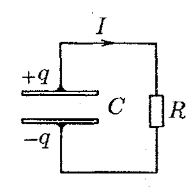


Рис. 12.5

Мгновенное значение напряжения, приложенного к сопротивлению, равно $U = q/C$. Следовательно, для силы тока получается выражение

$$I = \frac{U}{R} = \frac{q}{RC}. \tag{12.9}$$

Заменим силу тока через $-dq/dt$, где $-dq$ — убыль заряда на обкладках за время dt. В результате получится

дифференциальное уравнение

$$-\frac{dq}{dt} = \frac{q}{RC}, \quad \text{или} \quad \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt.$$

Согласно (12.9) $dq/q = dI/I$. Поэтому можно написать

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC}dt.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\ln I = -\frac{1}{RC}t + \ln I_0$$

(через $\ln I_0$ обозначена постоянная интегрирования). Наконец, пропотенцировав полученное выражение, придем к формуле

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \tag{12.10}$$

Легко сообразить, что I_0 представляет собой начальное значение силы тока.

Из выражения (12.10) следует, что за время

$$\tau = RC \tag{12.11}$$

сила тока уменьшается в e раз. В соответствии с этим величина (12.11) носит название постоянной времени цепи. Чем больше эта постоянная, тем медленнее спадает ток в цепи.

Схема ионизационной камеры (см. рис. 12.3 *а*) сходна со схемой, изображенной на рис. 12.5. Роль C играет межэлектродная емкость, показанная на схеме камеры штриховыми линиями. С увеличением сопротивления R возрастает напряжение между точками *1* и *2* при данной силе тока и, следовательно, облегчается регистрация импульсов. Это обстоятельство побуждает применять R как можно большей величины. Вместе с тем для того чтобы камера могла раздельно регистрировать импульсы тока, порождаемые быстро следующими друг за другом частицами, постоянная времени должна быть невелика. Поэтому при выборе величины R для импульсных камер приходится идти на компромисс. Обычно берут R порядка 10^8 Ом. Тогда при $C \sim 10^{-11}$ Ф постоянная времени составляет 10^{-3} с.

Другим типом ионизационных камер являются так называемые интегрирующие камеры. В них берут R порядка 10^{15} Ом. При $C \sim 10^{-11}$ Ф постоянная времени будет равна 10^4 с. В этом случае импульсы тока, порождаемые отдельными ионизирующими частицами, сливаются, и по сопротивлению течет постоянный ток, который характеризует суммарный заряд ионов, возникающих в камере в единицу времени. Таким образом, ионизационные камеры обоих типов отличаются лишь значением постоянной времени RC.

Пропорциональные счетчики. Импульсы, вызываемые отдельными частицами, могут быть значительно усилены (до $10^3 \div 10^4$ раз), если напряжение между электродами попадает в область III (см. рис. 12.4). Прибор, работающий в таком режиме, называется пропорциональным счетчиком. Анод счетчика делается в виде нити диаметром в несколько сотых миллиметра. Напряженность поля вблизи нити особенно велика. При достаточно большом напряжении между электродами электроны, возникающие вблизи нити, приобретают под действием поля энергию, достаточную для того, чтобы вызывать ионизацию молекул ударом. В результате происходит размножение ионов. Размеры объема, в пределах которого происходит размножение, увеличиваются с ростом напряжения. В соответствии с этим увеличивается и коэффициент газового усиления.

Число первичных ионов зависит от природы и энергии частицы, вызвавшей импульс. Поэтому по величине импульсов на выходе пропорционального счетчика можно различать частицы разной природы, а также производить сортировку частиц одной и той же природы по их энергиям.

Счетчики Гейгера–Мюллера. Еще большего усиления импульса (до 10^8) можно достигнуть, заставив работать счетчик в области Гейгера (область V на рис. 12.4). Счетчик, работающий в этом режиме, называется счетчиком Гейгера–Мюллера[3]) (сокращенно счетчиком Гейгера). Разряд в области Гейгера, будучи «запущен» ионизирующей частицей, в дальнейшем переходит в самостоятельный. Поэтому величина импульса не

---

[3]) Эрвин Вильгельм Мюллер (1911–1977) — немецкий физик.

зависит от первоначальной ионизации. Для того чтобы получать от отдельных частиц раздельные импульсы, необходимо возникший разряд быстро прервать (погасить). Это достигается либо с помощью внешнего сопротивления R (в несамогасящихся счетчиках), либо за счет процессов, возникающих в самом счетчике. В последнем случае счетчик называется самогасящимся.

Гашение разряда с помощью внешнего сопротивления обусловливается тем, что при протекании по сопротивлению разрядного тока на нем возникает большое падение напряжения. Поэтому на межэлектродный промежуток приходится только часть приложенного напряжения, которая оказывается недостаточной для поддержания разряда.

Прекращение разряда в самогасящихся счетчиках вызывается следующими причинами. Электроны обладают примерно в 1000 раз большей подвижностью, чем положительные ионы. Поэтому за то время, за которое электроны достигают нити, положительные ионы почти не сдвигаются со своих мест. Эти ионы создают положительный пространственный заряд, ослабляющий поле вблизи нити, и разряд прекращается. Гашению разряда в этом случае препятствуют дополнительные процессы, которые мы не будем рассматривать. Для их подавления к газу, заполняющему счетчик (обычно аргону), добавляется примесь многоатомного органического газа (например, паров спирта). Такой счетчик разделяет импульсы от частиц, следующих друг за другом с интервалами порядка 10^{-4} с.

12.4. Процессы, приводящие к появлению носителей тока при самостоятельном разряде

Прежде чем приступить к описанию различных видов самостоятельного газового разряда, рассмотрим основные процессы, приводящие к возникновению носителей тока (электронов и ионов) при подобных разрядах.

Столкновения электронов с молекулами. Столкновения электронов (а также ионов) с молекулами могут иметь упругий и неупругий характер. Энергия молекулы (так же как и атома) квантуется. Это означает, что она может принимать лишь дискретные (т. е. разделенные конечными промежутками) значения, называемые уровнями энергии. Состояние с наименьшей энергией называется основ-

ным. Для того чтобы перевести молекулу из основного в различные возбужденные состояния, требуются определенные значения энергии W_1, W_2 и т. д. Сообщив молекуле достаточно большую энергию W_i, можно вызвать ее ионизацию.

Перейдя в возбужденное состояние, молекула обычно пребывает в нем всего лишь $\sim 10^{-8}$ с, после чего переходит в основное состояние, излучив избыток энергии в виде кванта света — фотона. В некоторых возбужденных состояниях, называемых метастабильными, молекулы могут находиться значительно дольше (примерно 10^{-3} с).

При соударении частиц должны выполняться законы сохранения энергии и импульса. Поэтому на передачу энергии при ударе накладываются определенные ограничения — не вся энергия, которой обладает ударяющая частица, может быть передана другой частице.

Если при столкновении молекуле не может быть сообщена энергия, достаточная для ее возбуждения, то суммарная кинетическая энергия частиц остается без изменений и удар будет упругим. Найдем энергию, сообщаемую ударяемой частице при упругом ударе.

Пусть частица массы m_1, имеющая скорость v_{10}, ударяется о неподвижную ($v_{20} = 0$) частицу массы m_2. При центральном ударе должны выполняться условия

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \qquad m_1 \mathbf{v}_{10} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2,$$

где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости частиц после удара. Из этих уравнений получаем скорость второй частицы

$$\mathbf{v}_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{v}_{10}$$

(см. § 3.11 кн. 1). Энергия, которая передается при упругом ударе второй частице, определяется выражением

$$\Delta W_{\text{упр}} = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_{10}^2}{2} \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Если $m_1 \ll m_2$, это выражение упрощается следующим образом:

$$\Delta W_{\text{упр}} = \frac{m_1 v_{10}^2}{2} \frac{4m_1}{m_2} = W_{10} \frac{4m_1}{m_2}, \qquad (12.12)$$

где W_{10} — первоначальная энергия ударяющейся частицы.

Из (12.12) вытекает, что легкая частица (электрон), ударяясь упруго о тяжелую частицу (молекулу), сообщает ей лишь малую долю своего запаса энергии. Легкая частица «отскакивает» от тяжелой, подобно мячу от стенки, с практически не изменяющейся по модулю скоростью. Соответствующий расчет дает, что при нецентральном ударе доля передаваемой энергии оказывается еще меньше.

При достаточно большой энергии ударяющей частицы (электрона или иона) молекула может быть возбуждена или ионизирована. В этом случае суммарная кинетическая энергия частиц не сохраняется — часть энергии затрачивается на возбуждение или ионизацию, т. е. на увеличение внутренней энергии соударяющихся частиц или на разделение одной из частиц на две.

Соударения, при которых происходит возбуждение частиц, называются *неупругими столкновениями первого рода*. Молекула, находящаяся в возбужденном состоянии, при столкновении с другой частицей (электроном, ионом или нейтральной молекулой) может перейти в основное состояние, не излучив избыток энергии, а передав его этой частице. В результате суммарная кинетическая энергия частиц после удара оказывается большей, чем до удара. Такие соударения называются *неупругими столкновениями второго рода*. Переход молекул из метастабильного состояния в основное осуществляется за счет столкновений второго рода.

При неупругом столкновении первого рода уравнения сохранения энергии и импульса имеют вид

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \Delta W_{\text{вн}}, \quad m_1 \mathbf{v}_{10} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2, \tag{12.13}$$

где $\Delta W_{\text{вн}}$ — приращение внутренней энергии молекулы, соответствующее ее переходу в возбужденное состояние. Исключив v_1 из этих уравнений, получим

$$\Delta W_{\text{вн}} = m_2 v_{10} v_2 - \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{m_2 v_2^2}{2}. \tag{12.14}$$

При заданной скорости ударяющей частицы (v_{10}) приращение внутренней энергии $\Delta W_{\text{вн}}$ зависит от скорости v_2, с которой молекула движется после удара. Найдем наибольшее возможное значение $\Delta W_{\text{вн}}$. Для этого продиффе-

ренцируем функцию (12.14) по v_2 и приравняем производную нулю:

$$\frac{d(\Delta W_{\text{вн}})}{dv_2} = m_2 v_{10} - \frac{m_1 + m_2}{m_1} m_2 v_2 = 0.$$

Отсюда $v_2 = m_1 v_{10}/(m_1 + m_2)$. Подстановка этого значения v_2 в формулу (12.14) дает

$$\Delta W_{\text{вн}\,\max} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_{10}^2}{2}. \tag{12.15}$$

Если ударяющая частица значительно легче ударяемой ($m_1 \ll m_2$), множитель $m_2/(m_1 + m_2)$ в выражении (12.15) близок к единице. Таким образом, при ударе легкой частицы (электрона) о тяжелую (молекулу) почти вся энергия ударяющей частицы может быть затрачена на возбуждение или ионизацию молекулы[4]).

Однако даже если энергия ударяющей частицы (электрона) достаточно велика, соударение не обязательно приводит к возбуждению или ионизации молекулы. Существуют определенные вероятности этих процессов, которые зависят от энергии (а следовательно, и от скорости) электрона. На рис. 12.6 показан примерный ход этих вероятностей. Чем быстрее летит электрон, тем меньший

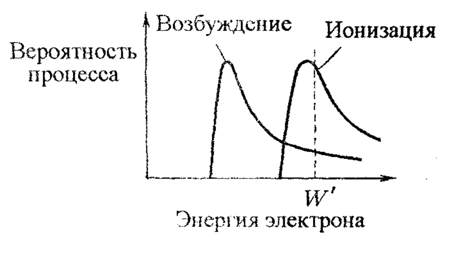


Рис. 12.6

промежуток времени взаимодействует он с молекулой, пролетая вблизи нее. Поэтому обе вероятности быстро достигают максимума, а затем с увеличением энергии электрона убывают. Из рисунка видно, что электрон, имеющий, например, энергию W', с большей вероятностью будет вызывать ионизацию молекулы, чем ее возбуждение.

[4]) В случае ионизации уравнения (12.13) усложняются, так как после соударения будет не две частицы, а три. Однако заключение о возможности затраты почти всей энергии электрона на ионизацию является справедливым.

Фотоионизация. Электромагнитное излучение состоит из элементарных частиц, называемых фотонами. Энергия фотона равна $\hbar\omega$, где $\hbar$ — постоянная Планка, деленная на 2π (см. (7.43)), ω — круговая частота излучения. Фотон может быть поглощен молекулой, причем его энергия идет на возбуждение молекулы или ее ионизацию. В этом случае ионизация молекулы называется фотоионизацией. Непосредственную (прямую) фотоионизацию способно вызвать ультрафиолетовое излучение. Энергия фотона видимого света недостаточна для отщепления электрона от молекулы. Поэтому видимое излучение не способно вызвать прямую фотоионизацию. Однако оно может обусловить так называемую ступенчатую фотоионизацию. Этот процесс осуществляется в два этапа. На первом этапе фотон переводит молекулу в возбужденное состояние. На втором этапе происходит ионизация возбужденной молекулы за счет ее соударения с другой молекулой.

В газовом разряде возможно возникновение коротковолнового излучения, способного вызывать прямую фотоионизацию. Достаточно быстрый электрон может при ударе не только ионизировать молекулу, но и перевести образовавшийся ион в возбужденное состояние. Переход иона в основное состояние сопровождается испусканием излучения большей частоты, чем у излучения нейтральной молекулы. Энергия фотона такого излучения оказывается достаточной для непосредственной фотоионизации.

Испускание электронов поверхностью электродов. Электроны могут поступать в газоразрядный объем за счет эмиссии (испускания) их поверхностью электродов. Такие виды эмиссии, как термоэлектронная эмиссия, вторичная электронная эмиссия и автоэлектронная эмиссия, в некоторых видах разряда играют основную роль.

Термоэлектронной эмиссией называется испускание электронов нагретыми твердыми или жидкими телами. Вследствие распределения по скоростям в металле всегда имеется некоторое число свободных электронов, энергия которых достаточна для того, чтобы преодолеть потенциальный барьер и выйти за пределы металла. При комнатной температуре количество таких электронов ничтожно мало. Однако с повышением температуры количество электронов, способных покинуть металл, очень быстро растет и при температуре порядка 10^3 К становится вполне ощутимым.

Вторичной электронной эмиссией называется испускание электронов поверхностью твердого или жидкого тела при бомбардировке ее электронами или ионами. Отношение числа испущенных (вторичных) электронов к числу частиц, вызвавших эмиссию, называют коэффициентом вторичной эмиссии. В случае бомбардировки поверхности металла электронами значения этого коэффициента заключены в пределах от 0,5 (для бериллия) до 1,8 (для платины).

Автоэлектронной (или холодной) эмиссией называется испускание электронов поверхностью металла, происходящее в том случае, когда вблизи поверхности создается электрическое поле очень большой напряженности ($\sim 10^8$ В/м). Это явление иногда называют также вырыванием электронов электрическим полем.

12.5. Плазма

Плазмой называется частично или полностью ионизованный газ, в котором положительные и отрицательные заряды в среднем нейтрализуют друг друга. В общем случае плазма состоит из электронов, положительных ионов и нейтральных атомов (или молекул). В пределах малых объемов (размеры которых даны ниже) строгое равенство чисел положительно и отрицательно заряженных частиц может нарушаться. Поэтому говорят, что плазма квазинейтральна (латинская приставка «квази» означает «мнимый», «ненастоящий»).

Плазму принято характеризовать степенью ионизации α, под которой понимают отношение числа ионизованных атомов к их полному числу (оба числа берутся для единицы объема). В зависимости от значения α говорят о слабо ($\alpha \sim 10^{-3}$), умеренно ($\alpha \sim 10^{-2}$) и полностью ионизованной плазме.

Плазма является преобладающим состоянием вещества во Вселенной. Звезды, галактические туманности и межзвездная среда представляют собой плазму, которую называют четвертым состоянием вещества. Один из верхних слоев атмосферы, называемый ионосферой, состоит из слабо ионизованной плазмы. Этот слой отражает радиоволны и делает возможной радиосвязь на больших расстояниях. В земных условиях плазма образуется

при электрическом разряде в газах, в процессах горения и взрыва.

Сила взаимодействия между атомами и молекулами убывает с расстоянием очень быстро (как $1/r^7$). Поэтому частицы газа взаимодействуют лишь при сильном сближении. Кулоновские силы убывают гораздо медленнее (как $1/r^2$). Поэтому взаимодействие между частицами (электронами и ионами) в плазме постоянно влияет на их движение, вследствие чего для плазмы характерны коллективные процессы.

Вокруг каждого заряда преимущественно располагаются заряды противоположного знака, нейтрализующие влияние данного заряда за пределами сферы радиуса D, называемого *дебаевским*[5]) *радиусом экранировки*. Соответствующий расчет дает

$$D = \sqrt{\varepsilon_0 kT/(ne^2)}, \tag{12.16}$$

где n — концентрация (т. е. количество в единице объема) электронов в плазме. Подстановка значений констант приводит к формуле

$$D = 69\sqrt{T/n}.$$

Для примера оценим дебаевский радиус для плазмы, возникающей в канале молнии. Газ в этом случае ионизуется полностью, так что n равно числу молекул воздуха в единице объема, т. е. примерно $2,7 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$, температура составляет приблизительно $2 \cdot 10^4$ К. Следовательно, $D = 69\sqrt{2 \cdot 10^4/(2,7 \cdot 10^{25})}$ м $\approx 2 \cdot 10^{-9}$ м. Таким же примерно будет дебаевский радиус при $T = 500$ К и $n = 3 \cdot 10^{23}$ м$^{-3}$.

Внешнее электрическое поле проникает в плазму только на расстояние порядка дебаевского радиуса. Таким образом, плазма экранирует внешнее электрическое поле. Дебаевский радиус определяет размеры областей, в которых равенство чисел частиц разных знаков может не соблюдаться, т. е. нарушается условие квазинейтральности. Квазинейтральность плазмы в целом соблюдается при условии, что линейные размеры l области, занимаемой плазмой, много больше дебаевского радиуса D ($l \gg D$).

---

[5]) В честь Петера Йозефа Вильгельма Дебая (1884–1966). Родился в Нидерландах, учился и работал в Германии, с 1940 г. — в США.

Только при выполнении этого условия можно говорить о плазме как таковой.

Мы уже отмечали, что для плазмы характерны коллективные процессы. Дальнодействие кулоновских сил приводит к тому, что плазма может рассматриваться как упругая среда. Если группу электронов в плазме сдвинуть из их равновесного положения, то на них будет действовать электростатическая возвращающая сила. Это служит причиной того, что в плазме легко возбуждаются продольные колебания пространственного заряда, называемые ленгмюровскими[6] волнами. Их частота, называемая плазменной частотой, определяется выражением

$$\omega = \sqrt{ne^2/(m\varepsilon_0)} \qquad (12.17)$$

(n — концентрация электронов, m — масса электрона).

Средние значения энергии электронов, ионов и нейтральных атомов могут отличаться друг от друга. В этом случае плазму нельзя характеризовать одним значением температуры и приходится различать электронную $T_э$, ионную $T_и$ и температуру нейтральных атомов $T_а$. Плазму, у которой эти температуры различны, называют неизотермической. Если все три температуры одинаковы, плазма называется изотермической. Неизотермической является газоразрядная плазма, т. е. плазма, возникающая при газовом разряде. Плазма, возникающая вследствие высокой температуры вещества, является изотермической. Условно изотермическую плазму подразделяют на низкотемпературную (с $T_и < 10^5$ К) и высокотемпературную (с $T_и > 10^6$ К).

Достаточно разогретая плазма является очень хорошим проводником. Благодаря большей подвижности электронов, чем ионов, проводимость плазмы в основном определяется электронами. Соответствующий расчет дает для проводимости плазмы формулу

$$\sigma \approx 10^{-3} T^{3/2} \text{ См/м}. \qquad (12.18)$$

При $T \approx 15 \cdot 10^6$ К проводимость плазмы равна проводимости одного из лучших проводников — серебра.

---

[6]) Ирвинг Ленгмюр (1881–1957) и Леви Тонкс (1897–1971) — оба американские физики — ввели термин «плазма» (1929 г.) и занимались исследованием газоразрядной плазмы.

Важнейшими техническими применениями плазмы являются управляемый термоядерный синтез и непосредственное преобразование теплоты в электрическую энергию в магнитогидродинамических генераторах (МГД-генераторах). Для протекания термоядерной реакции (т. е. объединения легких ядер в более тяжелые) вещество нужно нагреть до столь высокой температуры (порядка 10^8 К), при которой оно находится в состоянии плазмы. Задачу удержания плазмы в ограниченном объеме нельзя решить, поместив ее в обычный сосуд, ибо стенки любого сосуда при такой температуре немедленно испарятся. Поэтому для удержания плазмы используются сильные магнитные поля.

Для того чтобы плазма находилась в стационарном состоянии, необходимо наличие процессов, восполняющих убыль ионов в результате рекомбинации. В высокотемпературной плазме это осуществляется за счет термической ионизации, в газоразрядной плазме — за счет ударной ионизации электронами, ускоренными электрическим полем. В ионосфере высокая степень ионизации молекул (порядка 1%) поддерживается за счет фотоионизации, обусловленной коротковолновым излучением Солнца.

Электроны в газоразрядной плазме участвуют в двух движениях — хаотическом с некоторой средней скоростью $\langle v \rangle$ и упорядоченном движении в направлении, противоположном $\mathbf{E}$, со средней скоростью $\langle u \rangle$, гораздо меньшей, чем $\langle v \rangle$.

Докажем, что электрическое поле не только обусловливает упорядоченное движение электронов плазмы, но и увеличивает скорость $\langle v \rangle$ их хаотического движения. Пусть в момент включения поля в газе имеется некоторое количество электронов, средняя скорость которых соответствует температуре газа $T_{\text{г}}$ ($(1/2)m\langle v^2 \rangle = (3/2)kT_{\text{г}}$). За время между двумя последовательными соударениями с молекулами электрон проходит в среднем путь λ (рис. 12.7; траектория электрона слегка искривлена под действием силы $-e\mathbf{E}$). При этом поле совершает над ним работу

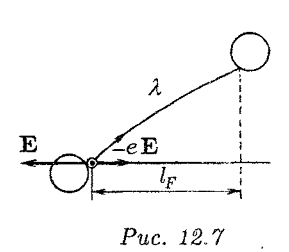


Рис. 12.7

$$A = eEl_F, \tag{12.19}$$

где l_F — проекция перемещения электрона на направление действующей на него силы. Вследствие соударений с молекулами направление движения электрона все время изменяется случайным образом. Соответственно изменяются величина и знак l_F. Поэтому работа (12.19) для отдельных участков траектории имеет неодинаковую величину и разный знак. На одних участках поле увеличивает энергию электрона, на других уменьшает. Если бы упорядоченное движение электронов отсутствовало, среднее значение l_F, а следовательно, и работы (12.19) было бы равно нулю. Однако наличие упорядоченного движения приводит к тому, что среднее значение работы A отлично от нуля и притом положительно. Оно равно

$$\langle A\rangle = eE\langle u\rangle\tau = eE\langle u\rangle\frac{\lambda}{\langle v\rangle}, \qquad (12.20)$$

где τ — средняя продолжительность свободного пробега электронов ($\langle u\rangle \ll \langle v\rangle$).

Таким образом, поле в среднем увеличивает энергию электронов. Правда, электрон, столкнувшись с молекулой, передает ей часть своей энергии. Но, как мы выяснили в предыдущем параграфе, относительная доля δ переданной при упругом ударе энергии очень мала — она в среднем равна [7] $\langle\delta\rangle = 2m/M$ (m — масса электрона, M — масса молекулы).

В разряженном газе (в котором λ больше) и при достаточно большой напряженности поля E работа (12.20) может превзойти энергию $(1/2)m\langle v^2\rangle\cdot\langle\delta\rangle$, передаваемую в среднем молекуле при каждом столкновении. В результате энергия хаотического движения электронов будет расти. В конце концов она достигнет значения, достаточного для того, чтобы возбудить или ионизировать молекулу. Начиная с этого момента, часть соударений перестает быть упругой и сопровождается большой потерей энергии. Поэтому средняя доля передаваемой энергии $\langle\delta\rangle$ увеличивается.

Итак, энергию, необходимую для ионизации, электроны приобретают не за один свободный пробег, а постепенно накапливают ее на протяжении ряда пробегов. Ионизация приводит к возникновению большого количества электронов и положительных ионов — возникает плазма.

---

[7]) Согласно формуле (12.12) при центральном ударе $\delta = 4m/M$. В случае, когда электрон и молекула лишь слегка «задевают» друг друга, $\delta \approx 0$.

Энергия электронов плазмы определяется условием, что среднее значение работы, совершаемой полем над электроном за один свободный пробег, равно среднему значению энергии, отдаваемой электроном при соударении с молекулой:

$$eE\langle u\rangle\frac{\lambda}{\langle v\rangle}=\frac{m\langle v^2\rangle}{2}\langle\delta\rangle.$$

Здесь $\langle\delta\rangle$ есть сложная функция скорости $\langle v\rangle$.

Опыт дает, что для электронов в газоразрядной плазме имеет место максвелловское распределение по скоростям. Вследствие слабого взаимодействия электронов с молекулами (при упругом ударе δ очень мало, а относительное количество неупругих соударений незначительно) средняя скорость хаотического движения электронов оказывается во много раз больше скорости, соответствующей температуре газа $T_г$. Если ввести температуру электронов $T_э$, определив ее из соотношения

$$\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle=\frac{3}{2}kT_э,$$

то для $T_э$ получается значение порядка нескольких десятков тысяч кельвинов. Несовпадение температур $T_г$ и $T_э$ свидетельствует о том, что между электронами и молекулами в газоразрядной плазме нет термодинамического равновесия.

12.6. Тлеющий разряд

Тлеющий разряд возникает при низких давлениях. Его можно наблюдать в стеклянной трубке длиной около 0,5 м с впаянными у концов плоскими металлическими электродами (рис. 12.8). На электроды подается напряжение порядка 10^3 В. При атмосферном давлении тока в трубке практически нет. Если понижать давление, то примерно при 50 мм рт. ст. возникает разряд в виде светящегося извилистого тонкого шнура, соединяющего анод с катодом. По мере понижения давления шнур утолщается и приблизительно при 5 мм рт. ст. заполняет все сечение трубки — устанавливается тлеющий разряд. Его основные части показаны на рис. 12.8. Вблизи катода располагается тонкий светящийся слой, называемый катодной светящейся пленкой. Между катодом и светящейся

пленкой находится астоново темное пространство. По другую сторону светящейся пленки помещается слабо светящийся слой, по контрасту кажущийся темным и называемый катодным (или круксовым[8]) темным пространством. Этот слой переходит в светящуюся область, которую называют тлеющим свечением. Все перечисленные слои образуют катодную часть

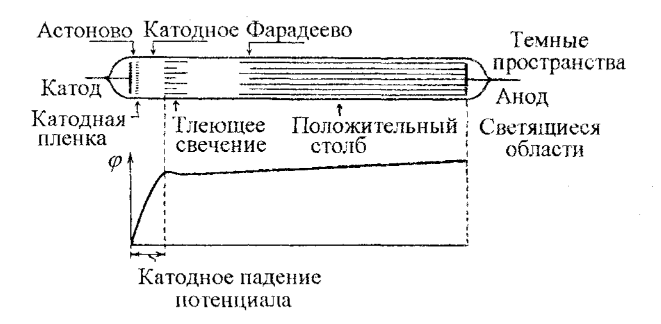


Рис. 12.8

тлеющего разряда. С тлеющим свечением граничит темный промежуток — фарадеево темное пространство. Граница между ними размыта. Вся остальная часть трубки заполнена светящимся газом; ее называют положительным столбом. При понижении давления катодная часть разряда и фарадеево темное пространство расширяются, а положительный столб укорачивается. При давлении порядка 1 мм рт. ст. положительный столб распадается на ряд чередующихся темных и светлых изогнутых слоев — страт.

Измерения, осуществленные с помощью зондов (тоненьких проволочек, впаянных в разных точках вдоль трубки), а также другими методами, показали, что потенциал изменяется вдоль трубки неравномерно (см. график на рис. 12.8). Почти все падение потенциала приходится на первые три участка разряда по катодное темное пространство включительно. Эту часть напряжения, приложенного к трубке, называют катодным падением потенциала. В области тлеющего свечения потенциал не изменяется — здесь напряженность поля равна нулю.

---

[8]) Уильям Крукс (1832–1919) — английский физик и химик.

Наконец, в фарадеевом темном пространстве и положительном столбе потенциал медленно растет. Такое распределение потенциала вызвано образованием в области катодного темного пространства положительного пространственного заряда, обусловленного повышенной концентрацией положительных ионов.

Основные процессы, необходимые для поддержания тлеющего разряда, происходят в его катодной части. Остальные части разряда не существенны, они могут даже отсутствовать (при малом расстоянии между электродами или при низком давлении). Основных процессов два — вторичная электронная эмиссия из катода, вызванная бомбардировкой его положительными ионами, и ударная ионизация электронами молекул газа.

Положительные ионы, ускоренные катодным падением потенциала, бомбардируют катод и выбивают из него электроны. В астоновом темном пространстве эти электроны ускоряются электрическим полем. Приобретя достаточную энергию, они начинают возбуждать молекулы газа, в результате чего возникает катодная светящаяся пленка. Электроны, пролетевшие без столкновений в область катодного темного пространства, имеют большую энергию, вследствие чего они чаще ионизируют молекулы, чем возбуждают (см. графики на рис. 12.6). Таким образом, интенсивность свечения газа уменьшается, но зато образуется много электронов и положительных ионов. Образовавшиеся ионы вначале имеют очень малую скорость. Поэтому в катодном темном пространстве создается положительный пространственный заряд, что приводит к перераспределению потенциала вдоль трубки и к возникновению катодного падения потенциала.

Электроны, возникшие в катодном темном пространстве, проникают в область тлеющего свечения, которая характеризуется высокой концентрацией электронов и положительных ионов и суммарным пространственным зарядом, близким к нулю (плазма). Поэтому напряженность поля здесь очень мала. Благодаря высокой концентрации электронов и ионов в области тлеющего свечения идет интенсивный процесс рекомбинации, сопровождающийся излучением выделяющейся при этом энергии. Таким образом, тлеющее свечение есть в основном свечение рекомбинации.

Из области тлеющего свечения в фарадеево темное пространство электроны и ионы проникают за счет диффузии

(на границе между этими областями поле отсутствует, но зато имеется большой градиент концентрации электронов и ионов). Вследствие меньшей концентрации заряженных частиц вероятность рекомбинации в фарадеевом темном пространстве сильно падает. Поэтому фарадеево пространство и кажется темным.

В фарадеевом темном пространстве уже имеется поле. Увлекаемые этим полем электроны постепенно накапливают энергию, так что в конце концов возникают условия, необходимые для существования плазмы. Положительный столб представляет собой газоразрядную плазму. Он выполняет роль проводника, соединяющего анод с катодными частями разряда. Свечение положительного столба вызвано в основном переходами возбужденных молекул в основное состояние. Молекулы разных газов испускают при таких переходах излучение разной длины волны. Поэтому свечение положительного столба имеет характерный для каждого газа цвет. Это обстоятельство используется в газосветных трубках для изготовления светящихся надписей и реклам. Эти надписи представляют собой не что иное, как положительный столб тлеющего разряда. Неоновые газоразрядные трубки дают красное свечение, аргоновые — синевато-зеленое и т. д.

Если постепенно уменьшать расстояние между электродами, катодная часть разряда остается без изменений, длина же положительного столба уменьшается, пока этот столб не исчезает совсем. В дальнейшем исчезает фарадеево темное пространство и начинает сокращаться протяженность тлеющего свечения, причем положение границы этого свечения с катодным темным пространством остается неизменным. Когда расстояние анода до этой границы становится очень малым, разряд прекращается.

Если постепенно понижать давление, катодная часть разряда распространяется на все большую часть межэлектродного пространства, и в конце концов катодное темное пространство распространяется почти на весь сосуд. Свечение газа в этом случае перестает быть заметным, зато стенки трубки начинают светиться зеленоватым свечением. Большинство электронов, выбитых из катода и ускоренных катодным падением потенциала, долетает без столкновений с молекулами газа до стенок трубки и, ударяясь о них, вызывает свечение. По историческим причинам поток электронов, испускаемый катодом газоразрядной трубки при очень низких давлениях, получил название **катодных лучей**. Свечение, вызываемое

бомбардировкой быстрыми электронами, называется катодолюминесценцией.

Если в катоде газоразрядной трубки сделать узкий канал, часть положительных ионов проникает в пространство за катодом и образует резко ограниченный пучок ионов, называемый каналовыми (или положительными) лучами. Именно таким способом были впервые получены пучки положительных ионов.

12.7. Дуговой разряд

В 1802 г. Петров[9]) обнаружил, что при разведении первоначально соприкасавшихся угольных электродов, подключенных к большой гальванической батарее, между электродами вспыхивает ослепительное свечение. При горизонтальном расположении электродов нагретый светящийся газ изгибается в виде дуги, в связи с чем открытое Петровым явление было названо электрической дугой. Сила тока в дуге может достигать огромных значений ($10^3 \div 10^4$ А) при напряжении в несколько десятков вольт.

Дуговой разряд может протекать как при низком (порядка нескольких миллиметров ртутного столба), так и при высоком (до 1000 атм) давлении. Основными процессами, поддерживающими разряд, являются термоэлектронная эмиссия с раскаленной поверхности катода и термическая ионизация молекул, обусловленная высокой температурой газа в межэлектродном пространстве. Почти все межэлектродное пространство заполнено высокотемпературной плазмой. Она служит проводником, по которому электроны, испущенные катодом, достигают анода. Температура плазмы составляет около 6000 К. В дуге сверхвысокого давления температура плазмы может достигать 10 000 К (напомним, что температура поверхности Солнца равна 5800 К). Вследствие бомбардировки положительными ионами катод раскаляется примерно до 3500 К. Анод, бомбардируемый мощным потоком электронов, разогревается еще больше. Это приводит к тому, что анод интенсивно испаряется и на его поверхности образуется углубление — кратер. Кратер является самым ярким местом дуги.

---

[9]) Василий Владимирович Петров (1761–1834) — русский физик и электротехник.

Дуговой разряд обладает падающей вольт-амперной характеристикой (рис. 12.9). Это объясняется тем, что при увеличении силы тока возрастают термоэлектронная эмиссия с катода и степень ионизации газоразрядного пространства. В результате сопротивление этого пространства уменьшается сильнее, чем возрастает ток.

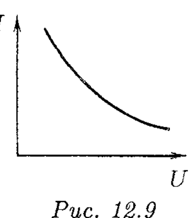


Рис. 12.9

Кроме описанной выше термоэлектронной дуги (т. е. разряда, обусловленного термоэлектронной эмиссией с раскаленной поверхности катода), бывает дуга с холодным катодом. Катодом такой дуги служит обычно жидкая ртуть, налитая в баллон, из которого удален воздух. Разряд происходит в парах ртути. Электроны вылетают из катода за счет автоэлектронной эмиссии. Необходимое для этого сильное поле у поверхности катода создается положительным пространственным зарядом, образованным ионами. Электроны испускаются не всей поверхностью катода, а небольшим ярко светящимся и непрерывно перемещающимся катодным пятном. Температура газа в этом случае невелика. Ионизация молекул в плазме происходит, как и при тлеющем разряде, за счет электронных ударов.

12.8. Искровой и коронный разряды

Искровой разряд возникает в тех случаях, когда напряженность электрического поля достигает пробивного для данного газа значения $E_{\text{пр}}$. Значение $E_{\text{пр}}$ зависит от давления газа; для воздуха при атмосферном давлении оно составляет около 3 МВ/м (30 кВ/см). С увеличением давления $E_{\text{пр}}$ возрастает. Согласно экспериментальному закону Пашена [10]) отношение пробивной напряженности поля к давлению приблизительно постоянно:

$$E_{\text{пр}}/p \approx \text{const}.$$

Искровой разряд сопровождается образованием ярко светящегося извилистого, разветвленного канала, по которому проходит кратковременный импульс тока большой силы. Примером может служить молния; длина ее бывает до 10 км, диаметр канала — до 40 см, сила тока может

[10]) Фридрих Пашен (1865–1947) — немецкий физик.

достигать 100 000 А и более, продолжительность импульса составляет около 10^{-4} с. Каждая молния состоит из нескольких (до 50) импульсов, следующих по одному и тому же каналу; их общая длительность (вместе с промежутками между импульсами) может достигать нескольких секунд. Температура газа в искровом канале бывает до 10 000 К. Быстрый сильный нагрев газа приводит к резкому повышению давления и возникновению ударных и звуковых волн. Поэтому искровой разряд сопровождается звуковыми явлениями — от слабого треска при искре малой мощности до раскатов грома, сопровождающих молнию.

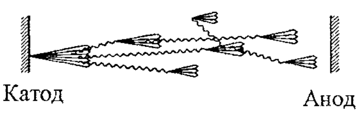


Рис. 12.10

Возникновению искры предшествует образование в газе сильно ионизированного канала, получившего название с т р и м е р а. Этот канал получается путем перекрытия отдельных электронных лавин, возникающих на пути искры. Родоначальником каждой лавины служит электрон, образующийся путем фотоионизации. Схема развития стримера показана на рис. 12.10. Пусть напряженность поля такова, что электрон, вылетевший за счет какого-либо процесса из катода, приобретает на длине свободного пробега энергию, достаточную для ионизации. Поэтому происходит размножение электронов — возникает лавина (образующиеся при этом положительные ионы не играют существенной роли вследствие гораздо меньшей подвижности; они лишь обусловливают пространственный заряд, вызывающий перераспределение потенциала). Коротковолновое излучение, испускаемое атомом, у которого при ионизации был вырван один из внутренних электронов (это излучение показано на схеме волнистыми линиями), вызывает фотоионизацию молекул, причем образовавшиеся электроны порождают все новые лавины. После перекрывания лавин образуется хорошо проводящий канал — стример, по которому устремляется от катода к аноду мощный поток электронов — происходит пробой.

Если электроды имеют форму, при которой поле в межэлектродном пространстве приблизительно однородно (например, представляют собой шары достаточно большого диаметра), то пробой возникает при вполне определенном

напряжении $U_{пр}$, значение которого зависит от расстояния между шарами l ($U_{пр} = E_{пр}l$). На этом основан искровой вольтметр, с помощью которого измеряют высокое напряжение ($10^3 \div 10^5$ В). При измерениях определяется наибольшее расстояние l_{max}, при котором возникает искра. Умножив затем $E_{пр}$ на l_{max}, получают значение измеряемого напряжения.

Если один из электродов (или оба) имеет очень большую кривизну (например, электродом служит тонкая проволока или острие), то при не слишком большом напряжении возникает так называемый коронный разряд. При увеличении напряжения этот разряд переходит в искровой или дуговой.

При коронном разряде ионизация и возбуждение молекул происходят не во всем межэлектродном пространстве, а лишь вблизи электрода с малым радиусом кривизны, где напряженность поля достигает значений, равных или превышающих $E_{пр}$. В этой части разряда газ светится. Свечение имеет вид короны, окружающей электрод, чем и вызвано название этого вида разряда. Коронный разряд с острия имеет вид светящейся кисти, в связи с чем его иногда называют кистевым разрядом. В зависимости от знака коронирующего электрода говорят о положительной или отрицательной короне. Между коронирующим слоем и некоронирующим электродом расположена внешняя область короны. Режим пробоя ($E \geq E_{пр}$) существует только в пределах коронирующего слоя. Поэтому можно сказать, что коронный разряд представляет собой неполный пробой газового пространства.

В случае отрицательной короны явления на катоде сходны с явлениями на катоде тлеющего разряда. Ускоренные полем положительные ионы выбивают из катода электроны, которые вызывают ионизацию и возбуждение молекул в коронирующем слое. Во внешней области короны поле недостаточно для того, чтобы сообщить электронам энергию, необходимую для ионизации или возбуждения молекул. Поэтому проникшие в эту область электроны дрейфуют под действием поля к аноду. Часть электронов захватывается молекулами, вследствие чего образуются отрицательные ионы. Таким образом, ток во внешней области обусловливается только отрицательными носителями — электронами и отрицательными ионами. В этой области разряд имеет несамостоятельный характер.

В положительной короне электронные лавины зарождаются у внешней границы короны и устремляются к коронирующему электроду — аноду. Возникновение электронов, порождающих лавины, обусловлено фотоионизацией, вызванной излучением коронирующего слоя. Носителями тока во внешней области короны служат положительные ионы, которые дрейфуют под действием поля к катоду.

Если оба электрода имеют большую кривизну (два коронирующих электрода), вблизи каждого из них протекают процессы, присущие коронирующему электроду данного знака. Оба коронирующих слоя разделяются внешней областью, в которой движутся встречные потоки положительных и отрицательных носителей тока. Такая корона называется двуполярной.

Упоминавшийся в § 12.3 при рассмотрении счетчиков самостоятельный газовый разряд представляет собой коронный разряд.

Толщина коронирующего слоя и сила разрядного тока растут с увеличением напряжения. При небольшом напряжении размеры короны малы и ее свечение незаметно. Такая микроскопическая корона возникает вблизи острия, с которого стекает электрический ветер (см. § 3.1).

Корона, появляющаяся под действием атмосферного электричества на верхушках корабельных мачт, деревьев и т. п., получила в старину название огней святого Эльма.

В высоковольтных устройствах, в частности в линиях высоковольтных передач, коронный разряд приводит к вредным утечкам тока. Поэтому приходится принимать меры для его предотвращения. С этой целью, например, провода высоковольтных линий берут достаточно большого диаметра, тем большего, чем выше напряжение линии.

Полезное применение в технике коронный разряд нашел в электрофильтрах. Очищаемый газ движется в трубе, по оси которой расположен отрицательный коронирующий электрод. Отрицательные ионы, имеющиеся в большом количестве во внешней области короны, оседают на загрязняющих газ частицах или капельках и увлекаются вместе с ними к внешнему некоронирующему электроду. Достигнув этого электрода, частицы нейтрализуются и оседают на нем. Впоследствии при ударах по трубе осадок, образованный уловленными частицами, осыпается в сборник.

Глава 13

Электрические колебания

13.1. Квазистационарные токи

При рассмотрении электрических колебаний приходится иметь дело с токами, изменяющимися со временем. Закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа были установлены для постоянного тока. Однако они остаются справедливыми и для мгновенных значений изменяющихся тока и напряжения, если только их изменения происходят не слишком быстро. Электромагнитные возмущения распространяются по цепи с огромной скоростью, равной скорости света c.

Пусть длина цепи равна l. Если за время $\tau = l/c$, необходимое для передачи возмущения в самую отдаленную точку цепи, сила тока изменяется незначительно, то мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи будут практически одинаковыми. Токи, удовлетворяющие такому условию, называются **квазистационарными**. Для периодически изменяющихся токов условие квазистационарности имеет вид

$$\tau = \frac{l}{c} \ll T,$$

где T — период изменений.

Для цепи длиной 3 м запаздывание $\tau = 10^{-8}$ с. Таким образом, вплоть до $T \sim 10^{-6}$ с (что соответствует частоте 10^6 Гц) токи в такой цепи можно считать квазистационарными. Ток промышленной частоты ($\nu = 50$ Гц) квазистационарен для цепей длиной до ~ 100 км.

Мгновенные значения квазистационарных токов подчиняются закону Ома. Следовательно, для них справедливы и правила Кирхгофа.

В дальнейшем при изучении электрических колебаний мы всегда будем предполагать, что рассматриваемые нами токи квазистационарны.

13.2. Свободные колебания в контуре без активного сопротивления

В цепи, содержащей индуктивность и емкость, могут возникать электрические колебания. Поэтому такая цепь называется колебательным контуром. На рис. 13.1*а* изображены последовательные стадии колебательного процесса в идеализированном контуре, не обладающем активным сопротивлением.

Колебания в контуре можно вызвать, либо сообщив обкладкам конденсатора некоторый начальный заряд, либо

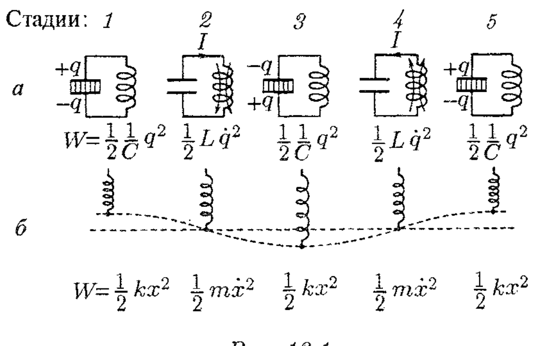


Рис. 13.1

возбудив в индуктивности ток (например, путем выключения внешнего магнитного поля, пронизывавшего витки катушки). Воспользуемся первым способом. Присоединим отключенный от индуктивности конденсатор к источнику напряжения. Это приведет к возникновению на обкладках разноименных зарядов $+q$ и $-q$ (стадия *1*). Между обкладками возникнет электрическое поле, энергия которого равна $(1/2)\,(q^2/C)$ (см. формулу (4.5)). Если затем отключить источник напряжения и замкнуть конденсатор на индуктивность, емкость начнет разряжаться и в контуре потечет ток. В результате энергия электрического поля будет уменьшаться, но зато возникнет все возрастающая энергия магнитного поля, обусловленного током, текущим через индуктивность. Эта энергия равна $(1/2)LI^2$ (см. формулу (8.37)).

Поскольку активное сопротивление контура равно нулю, полная энергия, слагающаяся из энергий электрического и магнитного полей, не расходуется на нагревание проводов

и будет оставаться постоянной [1]). Поэтому в момент, когда напряжение на конденсаторе, а следовательно, и энергия электрического поля обращаются в нуль, энергия магнитного поля, а значит, и ток достигают наибольшего значения (стадия *2*; начиная с этого момента ток течет за счет ЭДС самоиндукции). В дальнейшем ток уменьшается, и, когда заряды на обкладках достигнут первоначального значения q, сила тока станет равной нулю (стадия *3*). Затем те же процессы протекают в обратном направлении (стадии *4* и *5*), после чего система приходит в исходное состояние (стадия *5*) и весь цикл повторяется снова и снова. В ходе процесса периодически изменяются (т. е. колеблются) заряд на обкладках, напряжение на конденсаторе и сила тока, текущего через индуктивность. Колебания сопровождаются взаимными превращениями энергий электрического и магнитного полей.

На рис. 13.1*б* колебаниям в контуре сопоставлены колебания пружинного маятника. Сообщению зарядов обкладкам конденсатора соответствует выведение маятника внешней силой из положения равновесия и сообщение ему первоначального отклонения x. При этом возникает потенциальная энергия упругой деформации пружины, равная $(1/2)kx^2$. Стадии *2* соответствует прохождение маятника через положение равновесия. В этот момент квазиупругая сила равна нулю и маятник продолжает двигаться по инерции. К этому времени энергия маятника полностью переходит в кинетическую и определяется выражением $(1/2)m\dot{x}^2$. Сопоставление дальнейших стадий предоставляем читателю.

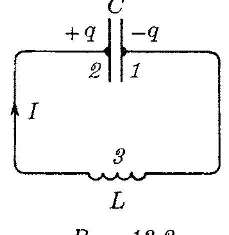


Рис. 13.2

Из сопоставления электрических и механических колебаний следует, что энергия электрического поля $(1/2)\times$ $\times(q^2/C)$ аналогична потенциальной энергии упругой деформации, а энергия магнитного поля $(1/2)LI^2$ аналогична кинетической энергии. Индуктивность L играет роль массы m, величина, обратная емкости $(1/C)$, — роль жесткости k. Наконец, заряду q соответствует смещение маятника из

[1]) Строго говоря, в таком идеализированном контуре происходила бы потеря энергии на излучение электромагнитных волн. Эта потеря тем значительнее, чем больше частота колебаний и чем более «открыт» контур.

положения равновесия x, а силе тока $I = \dot{q}$ — скорость $\dot{x}$. Ниже мы увидим, что аналогия между электрическими и механическими колебаниями распространяется и на описывающие их математические уравнения.

Найдем уравнение колебаний в контуре без активного сопротивления. Условимся считать положительным ток, заряжающий конденсатор[2]) (рис. 13.2). Тогда

$$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}. \tag{13.1}$$

Напишем для цепи *1–3–2* выражение закона Ома

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} \tag{13.2}$$

(см. (5.27)). В нашем случае $R = 0, \varphi_1 - \varphi_2 = -q/C, \mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}_s = -L(dI/dt)$. Подстановка этих значений в (13.2) дает

$$0 = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt}. \tag{13.3}$$

Наконец, заменив dI/dt на $\ddot{q}$ (см. (13.1)), получим уравнение

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0. \tag{13.4}$$

Если ввести обозначение

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{13.5}$$

уравнение (13.4) принимает вид

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \tag{13.6}$$

хорошо знакомый нам из учения о механических колебаниях (см. формулу (8.49) кн. 1). Решением этого уравнения является функция

$$q = q_\text{m} \cos(\omega_0 t + \alpha). \tag{13.7}$$

Таким образом, заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой, определяемой выражением (13.5). Эта частота называется собствен-

---

[2]) При таком выборе направления тока аналогия между электрическими и механическими колебаниями оказывается более полной — скорости $\dot{x}$ соответствует $\dot{q}$ (при ином выборе скорости $\dot{x}$ соответствует $-\dot{q}$).

ной частотой контура (она соответствует собственной частоте гармонического осциллятора). Для периода колебаний получается формула Томсона (Кельвина)

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{13.8}$$

Напряжение на конденсаторе отличается от заряда множителем $1/C$:

$$U = \frac{q_{\mathrm{m}}}{C}\cos(\omega_0 t + \alpha) = U_{\mathrm{m}}\cos(\omega_0 t + \alpha). \tag{13.9}$$

Продифференцировав функцию (13.7) по времени, получим выражение для силы тока

$$I = -\omega_0 q_{\mathrm{m}}\sin(\omega_0 t + \alpha) = I_{\mathrm{m}}\cos\left(\omega_0 t + \alpha + \pi/2\right). \tag{13.10}$$

Таким образом, сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе на $\pi/2$.

Сопоставление формул (13.7) и (13.9) с формулой (13.10) показывает, что в момент, когда ток достигает наибольшего значения, заряд и напряжение обращаются в нуль и наоборот. Это соотношение между зарядом и током мы уже установили ранее, основываясь на энергетических соображениях.

Из формул (13.9) и (13.10) следует, что

$$U_{\mathrm{m}} = \frac{q_{\mathrm{m}}}{C}, \quad I_{\mathrm{m}} = \omega_0 q_{\mathrm{m}}.$$

Взяв отношение этих амплитуд и заменив ω_0 по формуле (13.5), получим

$$U_m = \sqrt{L/C}\, I_{\mathrm{m}}. \tag{13.11}$$

Эту формулу можно получить также, исходя из того, что наибольшее значение энергии электрического поля $CU_{\mathrm{m}}^2/2$ должно быть равно наибольшему значению энергии магнитного поля $LI_{\mathrm{m}}^2/2$.

13.3. Свободные затухающие колебания

Всякий реальный контур обладает активным сопротивлением. Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего свободные колебания затухают. Уравнение (13.2),

написанное для цепи *1–3–2*, изображенной на рис. 13.3, имеет вид

$$IR = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} \tag{13.12}$$

(ср. с (13.3)). Разделив это уравнение на L и заменив I на $\dot{q}$, а dI/dt на $\ddot{q}$, получим

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0. \tag{13.13}$$

Приняв во внимание, что величина, обратная LC, равна квадрату собственной частоты контура ω_0 (см. формулу (13.5)), и введя обозначение

$$\beta = R/2L, \tag{13.14}$$

уравнению (13.13) можно придать вид

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \tag{13.15}$$

Последнее уравнение совпадает с дифференциальным уравнением затухающих механических колебаний (см. формулу (8.98) кн. 1).

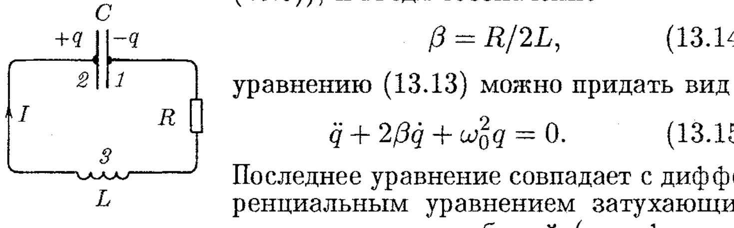


Рис. 13.3

При условии, что $\beta^2 < \omega_0^2$, т. е. при $R^2/4L^2 < 1/(LC)$, решение уравнения (13.15) имеет вид

$$q = q_{m0}\exp(-\beta t)\cos(\omega t + \alpha), \tag{13.16}$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$; подставив значение (13.5) для ω_0 и (13.14) для β, найдем, что

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \tag{13.17}$$

Таким образом, частота затухающих колебаний ω меньше собственной частоты ω_0. При $R = 0$ выражение (13.17) переходит в (13.5).

Разделив функцию (13.16) на емкость C, получим напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q_{m0}}{C}\exp(-\beta t)\cos(\omega t + \alpha) = U_{m0}\exp(-\beta t)\cos(\omega t + \alpha). \tag{13.18}$$

Чтобы найти силу тока, продифференцируем (13.16) по времени:

$$I = \dot{q} = q_{m0} \exp(-\beta t) \left[-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha)\right].$$

Умножив правую часть этой формулы на равное единице выражение $\omega_0 / \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$, получим

$$I = \omega_0 q_{m0} \exp(-\beta t) \left[-\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos(\omega t + \alpha) - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t + \alpha)\right].$$

Введя угол ψ, определяемый условиями

$$\cos\psi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = -\frac{\beta}{\omega_0}, \quad \sin\psi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \frac{\omega}{\omega_0},$$

можно написать,

$$I = \omega_0 q_{m0} \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \alpha + \psi). \qquad (13.19)$$

Поскольку $\cos\psi < 0$, а $\sin\psi > 0$, значение ψ заключено в пределах от $\pi/2$ до π $(\pi/2 < \psi < \pi)$. Таким образом, при наличии в контуре активного сопротивления сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе более чем на $\pi/2$ (при $R = 0$ опережение составляет $\pi/2$).

График функции (13.16) изображен на рис. 13.4. Графики для напряжения и силы тока имеют аналогичный вид. Затухание колебаний принято характеризовать л о г а р и ф м и ч е с к и м д е к р е м е н т о м з а т у х а н и я

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T \qquad (13.20)$$

(см. формулу (8.16) кн. 1). Здесь $a(t)$ — амплитуда соответствующей величины (q, U или I). Напомним, что логарифмический декремент затухания обратен числу колебаний N_e, совершаемых за время, в течение которого амплитуда уменьшится в e раз:

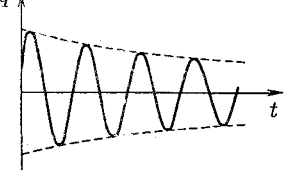


Рис. 13.4

$$\lambda = 1/N_e.$$

Подставив в (13.20) значение (13.14) для β и заменив T

на $2\pi/\omega$, получим для λ следующее выражение:

$$\lambda = \frac{R}{2L}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi R}{L\omega}. \qquad (13.21)$$

Частота ω, а следовательно, и λ определяются параметрами контура L, C и R. Таким образом, логарифмический декремент затухания является характеристикой контура.

Если затухание невелико ($\beta^2 \ll \omega_0^2$), можно положить в (13.21) $\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Тогда

$$\lambda \approx \frac{\pi R\sqrt{LC}}{L} = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}. \qquad (13.22)$$

Колебательный контур часто характеризуют его **добротностью** Q, которая определяется как величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания:

$$Q = \pi/\lambda = \pi N_e. \qquad (13.23)$$

Из (13.23) следует, что добротность контура тем выше, чем большее число колебаний успевает совершиться прежде, чем амплитуда уменьшится в e раз.

В случае слабого затухания (см. (13.22)).

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (13.24)$$

В § 8.9 кн. 1 было показано, что при слабом затухании добротность механической колебательной системы с точностью до множителя 2π равна отношению энергии, запасенной в системе в данный момент, к убыли этой энергии за один период колебаний. Покажем, что это справедливо и для электрических колебаний. Амплитуда силы тока в контуре убывает по закону $\exp(-\beta t)$. Энергия W, запасенная в контуре, пропорциональна квадрату амплитуды силы тока (или квадрату амплитуды напряжения на конденсаторе); следовательно, W убывает по закону $\exp(-2\beta t)$. Относительное уменьшение энергии за период равно

$$-\frac{\Delta W}{W} = \frac{W(t) - W(t+T)}{W(t)} =$$

$$= \frac{1 - \exp(-2\beta T)}{1} = 1 - \exp(-2\lambda).$$

При незначительном затухании (т. е. при условии, что $\lambda \ll 1$) можно $\exp(-2\lambda)$ приближенно положить равной $1 - 2\lambda$:

$$-\frac{\Delta W}{W} = 1 - (1 - 2\lambda) = 2\lambda.$$

Наконец, заменив в этом выражении λ на добротность контура Q в соответствии с формулой (13.23) и решив полученное уравнение относительно Q, получим

$$Q = -2\pi\frac{W}{\Delta W}. \qquad (13.25)$$

В заключение отметим, что при $R^2/4L^2 \geq 1/(LC)$, т. е. при $\beta^2 \geq \omega_0^2$ вместо колебаний происходит апериодический разряд конденсатора. Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется **критическим**. Значение критического сопротивления $R_к$ определяется условием $R_к^2/4L^2 = 1/(LC)$, откуда

$$R_к = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (13.26)$$

13.4. Вынужденные электрические колебания

Чтобы вызвать вынужденные колебания, нужно оказывать на систему внешнее периодически изменяющееся воздействие. В случае электрических колебаний это можно осуществить, если включить последовательно с элементами контура переменную ЭДС или, разорвав контур, подать на образовавшиеся контакты переменное напряжение

Рис. 13.5

$$U = U_m \cos\omega t \qquad (13.27)$$

(рис. 13.5). Это напряжение нужно прибавить к ЭДС самоиндукции. В результате формула (13.12) примет вид

$$IR = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} + U_m \cos\omega t. \qquad (13.28)$$

Произведя преобразование, получим уравнение

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t. \qquad (13.29)$$

Здесь ω_0^2 и β определяются формулами (13.5) и (13.14).

Уравнение (13.29) совпадает с дифференциальным уравнением вынужденных механических колебаний (см. формулу (8.112) кн. 1). Частное решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_m\cos(\omega t - \psi), \qquad (13.30)$$

где

$$q_m = \frac{U_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

(см. формулу (8.120) кн.1). Подстановка значений ω_0^2 и β дает

$$q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}}, \qquad (13.31)$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{R}{1/(\omega C) - \omega L}. \qquad (13.32)$$

Общее решение получится, если к частному решению (13.30) прибавить общее решение соответствующего однородного уравнения. Это решение было получено в предыдущем параграфе (см. формулу (13.16)); оно содержит экспоненциальный множитель $\exp(-\beta T)$, поэтому по прошествии достаточного времени становится очень малым, и им можно пренебречь. Следовательно, установившиеся вынужденные колебания описываются функцией (13.30).

Продифференцировав выражение (13.30) по t, найдем силу тока в контуре при установившихся колебаниях:

$$I = -\omega q_m\sin(\omega t - \psi) = I_m\cos(\omega t - \psi + \pi/2)$$

($I_m = \omega q_m$). Запишем это выражение в виде[3])

$$I = I_m\cos(\omega t - \varphi), \qquad (13.33)$$

---

[3]) До конца этой главы мы не встретимся с понятием потенциала. Поэтому обозначение фазового угла буквой φ не сможет привести к недоразумениям.

где $\varphi = \psi - \pi/2$ есть сдвиг по фазе между током и приложенным напряжением (см. (13.27)). В соответствии с (13.32)

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\psi} = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \qquad (13.34)$$

Из этой формулы следует, что ток отстает по фазе от напряжения ($\varphi > 0$) в том случае, когда $\omega L > 1/(\omega C)$, и опережает напряжение ($\varphi < 0$) при условии, что $\omega L < 1/(\omega C)$. Согласно (13.31)

$$I_{\text{m}} = \omega q_{\text{m}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}}. \qquad (13.35)$$

Представим соотношение (13.28) в виде

$$IR + \frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} = U_{\text{m}} \cos(\omega t). \qquad (13.36)$$

Произведение IR равно напряжению U_R на активном сопротивлении, q/C есть напряжение на конденсаторе U_C, выражение $L(dI/dt)$ определяет напряжение на индуктивности U_L. С учетом этого можно написать

$$U_R + U_C + U_L = U_{\text{m}} \cos(\omega t). \qquad (13.37)$$

Таким образом, сумма напряжений на отдельных элементах контура равна в каждый момент времени напряжению, приложенному извне (см. рис. 13.5).

В соответствии с (13.33)

$$U_R = RI_{\text{m}} \cos(\omega t - \varphi). \qquad (13.38)$$

Разделив выражение (13.30) на емкость, получим напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q_{\text{m}}}{C} \cos(\omega t - \psi) = U_{C\text{m}} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (13.39)$$

Здесь

$$U_{C\text{m}} = \frac{q_{\text{m}}}{C} = \frac{U_m}{\omega C\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}} = \frac{I_{\text{m}}}{\omega C} \qquad (13.40)$$

(см. (13.35)). Умножив производную функцию (13.33) на L, получим напряжение на индуктивности:

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = -\omega L I_{\text{m}} \sin(\omega t - \varphi) = U_{L\,rmm} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (13.41)$$

Здесь

$$U_{L\,\mathrm{m}} = \omega L I_{\mathrm{m}}. \tag{13.42}$$

Сопоставление формул (13.33), (13.38), (13.39) и (13.41) показывает, что напряжение на емкости отстает по фазе от силы тока на $\pi/2$, а напряжение на индуктивности опережает ток на $\pi/2$. Напряжение на активном сопротивлении изменяется в фазе с током. Фазовые соотношения можно представить очень наглядно с помощью векторной диаграммы (см. § 8.6 кн. 1). Напомним, что гармоническое колебание (или гармоническую функцию) можно задать с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с некоторой осью угол, равный начальной фазе колебания. Возьмем в качестве прямой, от которой отсчитывается начальная фаза, ось токов. Тогда получается диаграмма, изображенная на рис. 13.6. Согласно (13.37) три функции U_R, U_C, и U_L в сумме должны быть равны приложенному напряжению U. В соответствии с этим напряжение U изображается на диаграмме вектором, равным сумме векторов U_R, U_C и U_L. Заметим, что из прямоугольного треугольника, образованного на диаграмме векторами U, U_R и разностью $U_L - U_C$, легко получить формулу (13.35).

U_L
$\omega L I_{\mathrm{m}}$
U
U_{m}
φ
$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_{\mathrm{m}}$
Ось токов
$\frac{1}{\omega C} I_{\mathrm{m}}$
$R I_{\mathrm{m}}$
U_R
U_C

Рис. 13.6

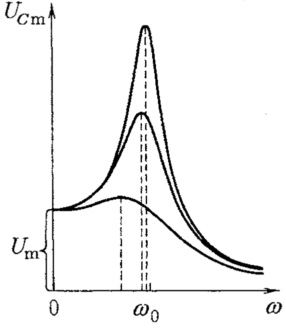


Рис. 13.7

Резонансная частота для заряда q и напряжения на конденсаторе U_C равна (см. формулу (8.128) кн. 1)

$$\omega_{q\,\text{рез}} = \omega_{U\,\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \le \omega_0. \tag{13.43}$$

Резонансные кривые для U_C изображены на рис. 13.7 (резонансные кривые для q имеют такой же вид). Они

сходны с резонансными кривыми, получающимися для механических колебаний (см. рис. 8.25 кн. 1). При $\omega \to 0$ резонансные кривые сходятся в одной точке с ординатой $U_{C\mathrm{m}} = U_{\mathrm{m}}$, что соответствует напряжению, возникающему на конденсаторе при подключении его к источнику постоянного напряжения U_{m}. Максимум при резонансе получается тем выше и острее, чем меньше $\beta = R/2L$, т. е. чем меньше активное сопротивление и больше индуктивность контура.

Резонансные кривые для силы тока изображены на рис. 13.8. Они соответствуют резонансным кривым для

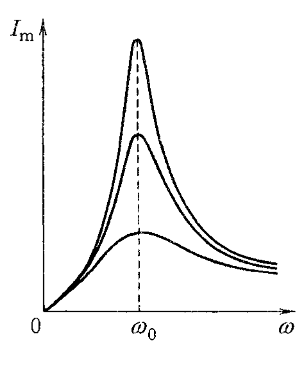


Рис. 13.8

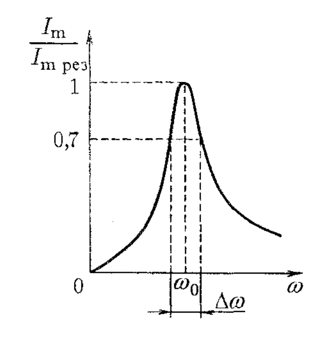


Рис. 13.9

скорости при механических колебаниях. Амплитуда силы тока имеет максимальное значение при $\omega L - 1/(\omega C) = 0$ (см. (13.35)). Следовательно, резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура ω_0:

$$\omega_{I\,\mathrm{рез}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \qquad (13.44)$$

Отрезок, отсекаемый резонансными кривыми на оси I_{m}, равен нулю — при постоянном напряжении установившийся ток в цепи с конденсатором течь не может.

При малом затухании (при $\beta^2 \ll \omega_0^2$) резонансную частоту для напряжения можно положить равной ω_0 (см. (13.43)). Соответственно можно считать, что $\omega_{\mathrm{рез}}L - 1/(\omega C) \approx 0$. Согласно формуле (13.40) отношение амплитуды напряжения на конденсаторе при резонансе $U_{C\mathrm{m\,рез}}$ к амплитуде внешнего напряжения U_{m} будет в

этом случае равно

$$\frac{U_{C\,\mathrm{m\,рез}}}{U_\mathrm{m}} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = Q \qquad (13.45)$$

(мы положили в (13.40) $\omega = \omega_{U_\text{рез}} = \omega_0$). Здесь Q — добротность контура (см. (13.24)). таким образом, добротность контура показывает, во сколько раз напряжение на конденсаторе может превысить приложенное напряжение.

Добротность контура определяет также остроту резонансных кривых. На рис. 13.9 показана одна из резонансных кривых для силы тока в контуре. По вертикальной оси отложены не значения I_m, соответствующие данной частоте, а отношения I_m к $I_{\mathrm{m\,рез}}$ (т. е. к I_m при резонансе). Рассмотрим ширину кривой $\Delta\omega$, взятую на высоте 0,7 (отношению амплитуд токов, равному 0,7, соответствует отношение мощностей, равное $0,7^2 \approx 0,5$). Можно показать, что отношение этой ширины к резонансной частоте равно величине, обратной добротности контура:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}. \qquad (13.46)$$

Напомним, что формулы (13.45) и (13.46) верны лишь при больших значениях Q, т. е. в случае, когда затухание свободных колебаний в контуре мало.

Явление резонанса используется для выделения из сложного напряжения нужной составляющей. Пусть напряжение, приложенное к контуру, равно

$$U = U_{\mathrm{m}1}\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + U_{\mathrm{m}2}\cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \ldots$$

Настроив контур на одну из частот ω_1, ω_2 и т. д. (т. е. подобрав соответствующим образом его параметры C и L), можно получить на конденсаторе напряжение, в Q раз превышающее значение данной составляющей, в то время как напряжение, создаваемое на конденсаторе другими составляющими, будет слабым. Такой процесс осуществляется, например, при настройке радиоприемника на нужную длину волны.

13.5. Переменный ток

Описанные в предыдущем параграфе установившиеся вынужденные колебания можно рассматривать как протекание в цепи, обладающей емкостью, индуктивностью и

активным сопротивлением, переменного тока, обусловленного переменным напряжением

$$U = U_{\mathrm{m}} \cos(\omega t). \qquad (13.47)$$

Согласно формулам (13.33)–(13.35) этот ток изменяется по закону

$$I = I_{\mathrm{m}} \cos(\omega t - \varphi). \qquad (13.48)$$

Амплитуда тока определяется амплитудой напряжения U_{m}, параметрами цепи C, L, R и частотой ω:

$$I_{\mathrm{m}} = \frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}}. \qquad (13.49)$$

Ток отстает по фазе от напряжения на угол φ, который зависит от параметров цепи и частоты:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \qquad (13.50)$$

В случае, когда $\varphi < 0$, ток фактически опережает напряжение.

Стоящее в знаменателе формулы (13.49) выражение

$$Z = \sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2} \qquad (13.51)$$

называется полным электрическим сопротивлением или импедансом.

Если цепь состоит из одного лишь активного сопротивления R, уравнение закона Ома имеет вид

$$IR = U_{\mathrm{m}} \cos(\omega t).$$

Отсюда следует, что ток в этом случае изменяется в фазе с напряжением, а амплитуда силы тока равна

$$I_{\mathrm{m}} = \frac{U_{\mathrm{m}}}{R}.$$

Сравнение этого выражения с (13.49) показывает, что замена конденсатора закороченным участком цепи означает переход не к $C = 0$, а к $C = \infty$.

Всякая реальная цепь обладает конечными R, L и C. В отдельных случаях некоторые из этих параметров бывают таковы, что их влиянием на ток можно пренебречь. Допустим, что R цепи можно положить равным нулю, а C — равным бесконечности. Тогда из формул (13.49) и (13.50) следует, что

$$I_{\mathrm{m}} = \frac{U_{\mathrm{m}}}{\omega L}, \qquad (13.52)$$

а $\operatorname{tg}\varphi = \infty$ (соответственно $\varphi = \pi/2$). Величину

$$X_L = \omega L \tag{13.53}$$

называют **реактивным индуктивным сопротивлением** цепи или просто **индуктивным сопротивлением** цепи. Если L выразить в генри, а ω — в обратных секундах (с^{-1}), то X_L будет выражено в омах. Из (13.53) следует, что индуктивное сопротивление растет с частотой ω. Постоянному току ($\omega = 0$) индуктивность не оказывает сопротивления.

Ток в индуктивности отстает от напряжения на $\pi/2$. Соответственно напряжение на индуктивности опережает ток на $\pi/2$ (см. рис. 13.6).

Теперь допустим, что можно положить равными нулю R и L. Тогда согласно формулам (13.49) и (13.50)

$$I_\text{m} = \frac{U_\text{m}}{1/(\omega C)}, \tag{13.54}$$

$\operatorname{tg}\varphi = -\infty$ (т. е. $\varphi = -\pi/2$). Величину

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \tag{13.55}$$

называют **реактивным емкостным сопротивлением** или просто **емкостным сопротивлением**. Если C выразить в фарадах, а ω — в обратных секундах, то X_C будет выражено в омах. Из (13.55) следует, что емкостное сопротивление убывает с частотой. Для постоянного тока $X_C = \infty$; следовательно, постоянный ток через конденсатор течь не может. Поскольку $\varphi = -\pi/2$, ток, текущий через конденсатор, опережает напряжение на $\pi/2$. Соответственно напряжение на конденсаторе отстает от тока на $\pi/2$ (см. рис. 13.6).

Наконец, допустим, что можно положить R равным нулю. В этом случае формула (13.49) переходит в

$$I_\text{m} = \frac{U_\text{m}}{|\omega L - 1/(\omega C)|}. \tag{13.56}$$

Величина

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = X_L - X_C \tag{13.57}$$

называется **реактивным сопротивлением** или **реактансом**.

Формулы (13.50) и (13.51) можно представить в виде

$$\operatorname{tg}\varphi = X/R, \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

Таким образом, если значения сопротивлений R и X отложить вдоль катетов треугольника, то длина гипотенузы будет численно равна Z (см. рис. 13.6).

Найдем мощность, выделяемую в цепи переменного тока. Мгновенное значение мощности равно произведению мгновенных значений напряжения и силы тока:

$$P(t) = U(t)I(t) = U_\mathrm{m}\cos\omega t \cdot I_\mathrm{m}\cos(\omega t - \varphi). \qquad (13.58)$$

Воспользовавшись формулой

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta),$$

выражению (13.58) можно придать вид

$$P(t) = \frac{1}{2}U_\mathrm{m}I_\mathrm{m}\cos\varphi + \frac{1}{2}U_\mathrm{m}I_\mathrm{m}\cos(2\omega t - \varphi). \qquad (13.59)$$

Практический интерес представляет среднее по времени значение $P(t)$, которое мы обозначим просто P. В связи с тем, что среднее значение $\cos(2\omega t - \varphi)$ равно нулю,

$$P = \frac{U_\mathrm{m}I_\mathrm{m}}{2}\cos\varphi. \qquad (13.60)$$

Из (13.59) следует, что мгновенная мощность колеблется около среднего значения с частотой, в два раза превышающей частоту тока (рис. 13.10).

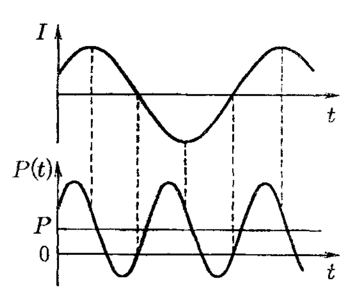


Рис. 13.10

В соответствии с формулой (13.50) можем записать

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}} = \frac{R}{Z}. \qquad (13.61)$$

Подставив это значение $\cos\varphi$ в формулу (13.60) и учтя, что $U_\mathrm{m}/Z = I_\mathrm{m}$, получим

$$P = \frac{RI_\mathrm{m}^2}{2} \qquad (13.62)$$

Такую же мощность развивает постоянный ток, сила которого равна

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \qquad (13.63)$$

Эта величина I называется действующим (или эффективным) значением силы тока. Аналогично величина

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \qquad (13.64)$$

называется действующим значением напряжения.

Выражение средней мощности через действующие значения силы тока и напряжения имеет вид

$$P = UI\cos\varphi. \qquad (13.65)$$

Входящий в это выражение множитель $\cos\varphi$ называют коэффициентом мощности. В технике стремятся сделать $\cos\varphi$ как можно большим. При малом $\cos\varphi$ для выделения в цепи необходимой мощности нужно пропускать ток большей силы, что приводит к возрастанию потерь в подводящих проводах.

Приложение

Векторный потенциал

В § 6.11 мы отметили, что магнитную индукцию **B** можно представить в виде

$$\mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}], \tag{П.1}$$

где **A** — некоторая функция, называемая векторным потенциалом. Такое представление возможно в связи с тем, что дивергенция ротора всегда равна нулю. Поэтому условие $\nabla \mathbf{B} = 0$ при таком представлении выполняется автоматически.

Подобно скалярному потенциалу φ электрического поля векторный потенциал **A** определяется неоднозначно. Добавление к **A** градиента произвольной функции ψ не изменяет значения $[\nabla \mathbf{A}]$, т. е. **B**. Действительно, заменим **A** через $\mathbf{A}+\nabla\psi$. Согласно (1.104) ротор градиента любой функции равен нулю. Поэтому

$$[\nabla, (\mathbf{A} + \nabla\psi)] = [\nabla \mathbf{A}] + [\nabla, \nabla\psi] = [\nabla \mathbf{A}].$$

Таким образом, функция

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi, \tag{П.2}$$

равно как и **A**, будет векторным потенциалом данного магнитного поля.

Взяв дивергенцию от функции (П.2), получим

$$\nabla \mathbf{A}' = \nabla \mathbf{A} + \nabla(\Delta\psi) = \nabla \mathbf{A} + \Delta\psi.$$

Подбором функции ψ можно придать $\nabla \mathbf{A}'$ любое наперед заданное, в частности нулевое, значение. Таким образом, векторный потенциал всегда можно выбрать так, чтобы его дивергенция равнялась нулю:

$$\nabla \mathbf{A} = 0, \tag{П.3}$$

т. е. так, чтобы поле **A** не имело источников.

Заметим, что даже при выполнении условия (П.3) функция **A** остается неоднозначной. Для того чтобы определение векторного потенциала было однозначным, надо задать граничные условия для **A**.

Уравнение Пуассона. В соответствии с (1.119) для поля в вакууме

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho.$$

Заменим в этом соотношении **E** на $-\nabla\varphi$:

$$\nabla(\nabla\varphi) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho.$$

Левая часть формулы представляет собой $\nabla^2\varphi = \Delta\varphi$, где Δ — оператор Лапласа. Таким образом, мы приходим к уравнению

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \tag{П.4}$$

которое называется уравнением Пуассона. В развернутом виде это уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho. \qquad (\text{П}.5)$$

Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, распределенных с плотностью $\rho(\mathbf{r})$, можно получить с помощью принципа суперпозиции и выражения для потенциала точечного заряда. Пометив штрихом переменные, по которым производится интегрирование, получим

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V\frac{\rho(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (\text{П}.6)$$

Функция (П.6) представляет собой решение уравнения (П.4).

Подставим в формулу (6.106) вместо $\mathbf{B}$ ротор $\mathbf{A}$:

$$[\nabla,[\nabla\mathbf{A}]]=\mu_0\mathbf{j}.$$

Преобразовав левую часть по формуле (1.106), получим

$$\nabla(\nabla\mathbf{A})-\Delta\mathbf{A}=\mu_0\mathbf{j}.$$

Выбрав $\mathbf{A}$ так, чтобы выполнялось условие (П.3), придем к уравнению

$$\Delta\mathbf{A}=-\mu_0\mathbf{j}, \qquad (\text{П}.7)$$

которое сходно с (П.4) и представляет собой уравнение Пуассона для векторного потенциала.

Уравнение (П.7) эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\Delta A_k=-\mu_0 j_k \quad (k=x,\,y,\,z). \qquad (\text{П}.8)$$

Решение этих уравнений можно получить, заменив в (П.6) функцию $(1/\varepsilon_0)\rho(\mathbf{r}')$ функцией $\mu_0 j_k(\mathbf{r}')$ (ср. уравнения (П.4) и (П.8)). В результате получим

$$A_k(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{j_k(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (k=x,\,y,\,z). \qquad (\text{П}.9)$$

Три выражения (П.9) можно объединить в одно векторное:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (\text{П}.10)$$

Отметим, что интегрирование в формулах (П.9) и (П.10) распространяется на всю область, в которой текут токи, создающие поле.

Формула (П.10) позволяет по известному распределению токов в пространстве вычислить векторный потенциал поля, создаваемого этими токами. Определив затем ротор векторного потенциала, найдем магнитную индукцию $\mathbf{B}$ поля.

Закон Био–Савара. Вычислим векторный потенциал, создаваемый током I, текущим по тонкому проводу. Разобьем провод на элементы длины dl и сопоставим каждому элементу вектор $d\mathbf{l}$, модуль которого равен dl, а направление совпадает с направлением вектора плотности тока $\mathbf{j}$ в данном элементе провода (рис. П.1). Положение элемента $d\mathbf{l}$ относительно начала координат O определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}'$, а положение точки P, в которой определяется векторный потенциал, — радиусом-вектором $\mathbf{r}$. Согласно формуле (П.10) элемент тока dl вносит в векторный потенциал в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ вклад, равный

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')S'dl}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad (\text{П.11})$$

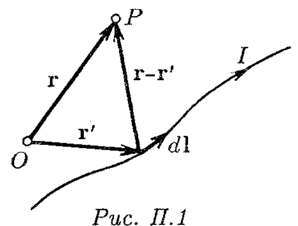


Рис. П.1

где S' — площадь поперечного сечения провода в точке $\mathbf{r}'$, а $S'dl = dV'$ — объем элемента dl. Поскольку векторы $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ и $d\mathbf{l}$ имеют одинаковое направление, числитель формулы (П.11) можно преобразовать следующим образом:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}')S'dl = j(\mathbf{r}')S'd\mathbf{l} = Id\mathbf{l},$$

где I — сила тока, текущего в проводе. Таким образом, формуле (П.11) можно придать вид

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\mathbf{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (\text{П.12})$$

Отметим, что $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}'$ есть приращение вектора $\mathbf{r}'$ на отрезке $d\mathbf{l}$.

Векторный потенциал в точке P равен сумме выражений (П.12)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\mathbf{l}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (\text{П.13})$$

Чтобы подчеркнуть, что положение отрезка $d\mathbf{l}$ относительно начала координат O определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}'$, мы записали его в виде $d\mathbf{l}(\mathbf{r}')$. Интегрирование производится по всей длине провода.

Магнитная индукция в точке P определяется ротором функции (П.13)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\nabla_r, \int\frac{d\mathbf{l}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] \qquad (\text{П.14})$$

(постоянные скалярные величины мы вынесли за знак ротора).

Интегрирование в формуле (П.14) осуществляется по штрихованным координатам (по координатам точки, в которой находится элемент $d\mathbf{l}$), а дифференцирование при вычислении ротора — по нештрихованным координатам (по координатам точки P, чтобы подчеркнуть это, мы снабдили оператор ∇ индексом r). Поэтому операции интегрирования и вычисления ротора можно поменять местами. В результате формула (П.14) примет вид

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\left[\nabla_r, \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]. \qquad (\text{П.15})$$

Ротор в выражении (П.15) берется от произведения вектора $d\mathbf{l}(\mathbf{r}')$ на скаляр $1/(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$. Согласно правилам дифференцирования ротор в этом случае состоит из двух слагаемых, в одном из которых оператор ∇_r действует на векторный сомножитель, а во втором — на скалярный сомножитель. Векторный сомножитель $d\mathbf{l}(\mathbf{r}')$ не содержит нештрихованных координат. Поэтому первое слагаемое равно нулю. Следовательно, подынтегральная функция в (П.15) может быть представлена в виде

$$\left[\nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, d\mathbf{l}(\mathbf{r}')\right].$$

Несложные вычисления дают для градиента функции $1/(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) = 1/\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ (при нахождении градиента дифференцирование осуществляется по координатам x, y, z) значение $-(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3)$. С учетом этого формула (П.15) принимает вид

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I[d\mathbf{l}, (\mathbf{r}-\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \qquad (\text{П.16})$$

Мы пришли к закону Био–Савара (см. формулу (6.28), в которой $\mathbf{r}$ соответствует $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ в формуле (П.16)).

Поле на больших расстояниях от контура с током. Найдем с помощью векторного потенциала магнитную индукцию $\mathbf{B}$ поля, создаваемого плоским контуром с током на расстояниях, значительно больших линейных размеров контура.

Выберем оси x и y в плоскости контура, причем так, чтобы направление тока образовывало с осью z правовинтовую систему (рис. П.2;

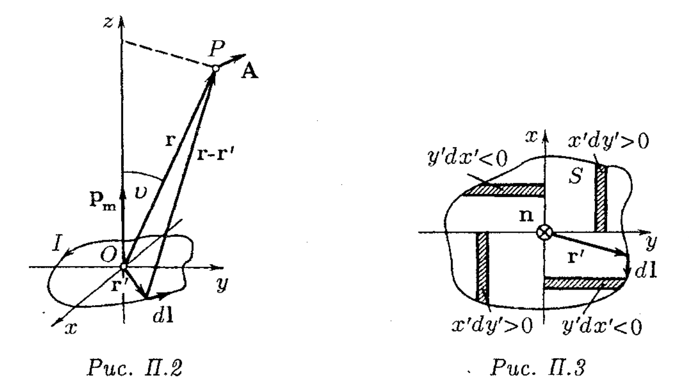


Рис. П.2 *Рис. П.3*

обозначения на этом рисунке те же, что и на рис. П.1). Согласно формуле (П.13)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (\text{П.17})$$

Интеграл теперь берется по замкнутому контуру.

Воспользовавшись тем, что по условию $r' \ll r$, сохраним в подынтегральном выражении только члены порядка r'/r, отбросив члены более высоких порядков малости. С учетом этого функцию $1/(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ можно представить в виде

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}' + \mathbf{r}'^2}} \approx \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2}} \qquad (\text{П.18})$$

(мы отбросили под корнем слагаемое $(r'/r)^2$). Поскольку $2\mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2 \ll 1$, цепочку преобразований (П.18) можно продолжить следующим образом:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r(1 - \mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2)} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^2}\right). \qquad (\text{П.19})$$

Заменив подынтегральную функцию в (П.17) ее приближенным выражением (П.19), получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\frac{1}{r}\oint d\mathbf{l} + \frac{1}{r^3}\oint (\mathbf{r}\mathbf{r}')\, d\mathbf{l}\right\} \qquad (\text{П.20})$$

(мы воспользовались тем, что r не зависит от штрихованных координат). Первое слагаемое равно нулю, поскольку $\oint d\mathbf{l} = 0$. Преобразуем второе слагаемое, выразив скалярное произведение через компоненты перемножаемых векторов и представив $d\mathbf{l}$ в виде $\mathbf{e}_x\, dx' + \mathbf{e}_y\, dy'$ (напомним, что x' и y' — координаты точки, в которой находится $d\mathbf{l}$; z' этой точки равно нулю). В результате выражение (П.20) примет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\oint (xx' + yy')(\mathbf{e}_x\, dx' + \mathbf{e}_y\, dy') =$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\left\{\mathbf{e}_x\left(x\oint x'\, dx' + y\oint y'\, dx'\right) + \right.$$
$$\left. + \mathbf{e}_y\left(x\oint x' dy' + y\oint y'\, dy'\right)\right\}. \qquad (\text{П.21})$$

Нештрихованные координаты мы вынесли за знак интегралов, поскольку интегрирование производится по штрихованным координатам. Под знаком интеграла $\oint x'\, dx'$ стоит дифференциал функции $x'^2/2$. Интеграл от полного дифференциала, взятый по замкнутому пути, равен нулю. Аналогично равен нулю $\oint y'\, dy'$. Поэтому выражение (П.21) упрощается следующим образом:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\left\{\mathbf{e}_x y\oint y'\, dx' + \mathbf{e}_y x\oint x'\, dy'\right\}. \qquad (\text{П.22})$$

Из рис. П.3 видно, что первый интеграл в (П.22) равен площади контура S, взятой со знаком минус, а второй интеграл — площади S,

взятой со знаком плюс. Таким образом,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o IS}{4\pi r^3}(-\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y x). \qquad (\text{П}.23)$$

Введем положительную нормаль $\mathbf{n}$ к плоскости контура, т. е. вектор с компонентами $(0,0,1)$ и вычислим векторное произведение

$$[\mathbf{nr}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y x.$$

Сравнение с (П.23) показывает, что выражение для векторного потенциала можно представить в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o IS}{4\pi r^3}[\mathbf{nr}] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[(IS\mathbf{n}),\mathbf{r}]}{r^3}.$$

Множитель $IS\mathbf{n}$ представляет собой магнитный момент контура $\mathbf{p}_m$ (см. формулу (6.74)). Следовательно,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\mathbf{p}_m\mathbf{r}]}{r^3}. \qquad (\text{П}.24)$$

Из полученного выражения вытекает, что вектор $\mathbf{A}$ в каждой точке P перпендикулярен к плоскости, проходящей через направление вектора $\mathbf{p}_m$ и точку P (см. рис. П.2).

Заменив IS на p_m, представим выражение (П.23) в виде

$$\mathring{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^3}(-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y). \qquad (\text{П}.25)$$

Вычислив ротор функции (П.25), найдем магнитную индукцию поля:

$$\mathbf{B} = [\nabla\mathbf{A}] = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\dfrac{y}{r^3} & \dfrac{x}{r^3} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^5}\{3xz\mathbf{e}_x + 3yz\mathbf{e}_y + (3z^2 - r^2)\mathbf{e}_z\}. \qquad (\text{П}.26)$$

С помощью формулы (П.26) можно вычислить $\mathbf{B}$ в любой точке, расстояние r которой от контура много больше линейных размеров контура. По этой формуле для точек $(0,0,z)$, лежащих на оси z, получается значение

$$\mathbf{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^5}\{2z^2\mathbf{e}_z\} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathbf{p}_m}{r^3} \qquad (\text{П}.27)$$

($p_m \mathbf{e}_z = \mathbf{p}_m$; $z^2 = r^2$). Формула (П.27) совпадает с формулой (6.82), полученной для кругового контура. Для точек $(x, y, 0)$, лежащих в плоскости контура,

$$\mathbf{B}(x, y, 0) = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^5}(-r^2 \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{p}_m}{r^3}$$

(ср. с формулами (1.54) и (1.55)).

Найдем модуль вектора $\mathbf{B}$ в точке с координатами x, y, z. Согласно формуле (П.26)

$$B^2 = \left(\frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^5}\right)^2 \{9x^2 z^2 + 9y^2 z^2 + (3z^2 - r^2)^2\} =$$

$$= \left(\frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^3}\right)^2 \left\{\frac{9(x^2 + y^2)z^2 + (3z^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2}{r^4}\right\}.$$

Путем несложных выкладок можно убедиться в том, что выражение в фигурных скобках можно представить в виде

$$1 + 3\frac{z^2}{r^2} = 1 + \cos^2\vartheta,$$

где ϑ — угол между вектором $\mathbf{p}_m$ и направлением на точку P (см. рис. П.2). Таким образом, мы приходим к выражению

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p_m}{r^3}\sqrt{1 + \cos^2\vartheta}$$

(см. формулу (6.86)).

Основные формулы электромагнетизма в СИ и в гауссовой системе

Наименование	СИ	Гауссова система
Закон Кулона	$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$	$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$
Напряженность электрического поля (определение)	$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$	
Напряженость поля точечного заряда	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}$	$E = \frac{q}{\varepsilon r^2}$
Напряженность поля между заряженными плоскостями и вблизи поверхности заряженного проводника	$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$	$E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$
Потенциал (определение)	$\varphi = \frac{W_p}{q}$	
Потенциал поля точечного заряда	$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r}$	$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}$
Работа сил поля над зарядом	$A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$	
Связь между E и φ	$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$	
Связь между φ и E	$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 \mathbf{E}\, d\mathbf{l}$	
Ротор вектора E для электростатического поля	$[\nabla\mathbf{E}] = 0$	
Циркуляция вектора E для электростатического поля	$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = 0$	
Электрический момент диполя	$p = ql$	

Наименование	СИ	Гауссова система
Механический момент, действующий на диполь в электрическом поле	$\mathbf{N} = [\mathbf{pE}]$	
Энергия диполя в электрическом поле	$W = -\mathbf{pE}$	
Дипольный момент «упругой» молекулы	$\mathbf{p} = \beta\varepsilon_0\mathbf{E}$	$\mathbf{p} = \beta\mathbf{E}$
Поляризованность (определение)	$\mathbf{P} = \dfrac{\sum \mathbf{p}}{\Delta V}$	
Связь между **P** и **E**	$\mathbf{P} = \varkappa\varepsilon_0\mathbf{E}$	$\mathbf{P} = \varkappa\mathbf{E}$
Связь между **P** и обьемной плотностью связанных зарядов	$\rho' = -\nabla\mathbf{P}$	
Связь между **P** и поверхностной плотностью связанных зарядов	$\sigma' = P_n$	
Электрическое смещение (электрическая индукция) (определение)	$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$
Дивергенция вектора **D**	$\nabla\mathbf{D} = \rho$	$\nabla\mathbf{D} = 4\pi\rho$
Теорема Гаусса для **D**	$\oint \mathbf{D}\,d\mathbf{S} = \sum q$	$\oint \mathbf{D}\,d\mathbf{S} = 4\pi\sum q$
Связь между диэлектрической проницаемостью ε и диэлектрической восприимчивостью $\varkappa$	$\varepsilon = 1 + \varkappa$	$\varepsilon = 1 + 4\pi\varkappa$
Связь между значениями $\varkappa$ в СИ и в гауссовой системе	$\varkappa_{\text{СИ}} = 4\pi\varkappa_{\text{ГС}}$	
Связь между **D** и **E**	$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$
Связь между **D** и **E** в вакууме	$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \mathbf{E}$
D поля точечного заряда	$D = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{q}{r^2}$	$D = \dfrac{q}{r^2}$

Наименование	СИ	Гауссова система
Емкость конденсатора (определение)	$C = \frac{Q}{U}$	
Емкость плоского кондесатора	$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$	$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$
Энергия системы зарядов	$W = \frac{1}{2}\sum q\varphi$	
Энергия заряженного конденсатора	$W = \frac{CU^2}{2}$	
Плотность энергии электрического поля	$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$	$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$
Сила тока (определение)	$I = \frac{dq}{dt}$	
Плотность тока (определение)	$j = \frac{dI}{dS_\perp}$	
Уравнение непрерывности	$\nabla \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	
Напряжение (определение)	$U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$	
Закон Ома	$I = \frac{U}{R}$	
Закон Ома в дифференциальной форме	$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho}\mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}$	
Закон Джоуля–Ленца	$Q = \int_0^t RI^2 dt$	
Закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме	$Q_{\text{уд}} = \rho j^2$	
Сила взаимодействия двух параллельных токов в вакууме (в расчете на единицу длины)	$F = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1 I_2}{b}$	$F = \frac{1}{c^2}\frac{2I_1 I_2}{b}$
Поле свободно движущегося заряда	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\mathbf{vr}]}{r^3}$	$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{q[\mathbf{vr}]}{r^3}$

Наименование	СИ	Гауссова система
Закон Био–Савара	$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}$	$d\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}$
Сила Лоренца	$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{vB}]$	$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{vB}]$
Закон Ампера	$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$	$d\mathbf{F} = \frac{1}{c}I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$
Магнитный момент контура с током	$p_m = IS$	$p_m = \frac{1}{c}IS$
Механический момент, действующий на магнитный момент в магнитном поле	$\mathbf{N} = [p_m\mathbf{B}]$	
«Механическая» энергия магнитного момента в магнитном поле	$W = -\mathbf{p}_m\mathbf{B}$	
Дивергенция вектора $\mathbf{B}$	$\nabla\mathbf{B} = 0$	
Теорема Гаусса для $\mathbf{B}$	$\oint \mathbf{B}\,dS = 0$	
Намагниченность (определение)	$\mathbf{J} = \frac{\sum \mathbf{p}_m}{\Delta V}$	
Напряженность магнитного поля (определение)	$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{J}$	$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J}$
Связь между $\mathbf{J}$ и $\mathbf{H}$	$\mathbf{J} = \chi\mathbf{H}$	
Связь между магнитной проницаемостью μ и магнитной восприимчивостью χ	$\mu = 1 + \chi$	$\mu = 1 + 4\pi\chi$
Связь между значениями χ в СИ и в гауссовой системе	$\chi_{\text{СИ}} = 4\pi\chi_{\text{ГС}}$	
Связь между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$
Связь между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в вакууме	$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mathbf{H}$

Наименование	СИ	Гауссова система
Ротор вектора **H** в случае стационарного поля	$\|\nabla \mathbf{H}\| = \mathbf{j}$	$\|\nabla \mathbf{H}\| = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$
Циркуляция вектора **H** в случае стационарного поля	$\oint \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \sum I$	$\oint \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\sum I$
Напряженность магнитного поля прямого тока	$H = \frac{1}{4\pi}\frac{2I}{b}$	$H = \frac{1}{c}\frac{2I}{b}$
Напряженность магнитного поля в центре кругового тока	$H = \frac{I}{2R}$	$H = \frac{1}{c}\frac{2\pi I}{R}$
Напряженность поля соленоида	$H = nI$	$H = \frac{4\pi}{c}nI$
Поток магнитной индукции (определение)	$\Phi = \int_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S}$	
Работа, совершаемая над контуром с током при перемещении его в магнитном поле	$A = I\Delta\Phi$	$A = \frac{1}{c}I\Delta\Phi$
Потокосцепление, или полный магнитный поток (определение)	$\Psi = \sum \Phi$	
Э. д. с. индукции	$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt}$	$\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c}\frac{d\Psi}{dt}$
Индуктивность (определение)	$L = \frac{\Psi}{I}$	$L = c\frac{\Psi}{I}$
Индуктивность соленоида	$L = \mu_0\mu n^2 lS$	$L = 4\pi\mu n^2 lS$
Э. д. с. самоиндукции (в отсутствие ферромагнетиков)	$\mathcal{E}_s = -L\frac{dI}{dt}$	$\mathcal{E}_s = -\frac{1}{c^2}L\frac{dI}{dt}$
Энергия магнитного поля	$W = \frac{LI^2}{2}$	$W = \frac{1}{c^2}\frac{LI^2}{2}$

Наименование	СИ	Гауссова система
Плотность энергии магнитного поля	$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$	$w = \frac{\mu H^2}{8\pi}$
Энергия связанных контуров с током	$W = \frac{1}{2}\sum L_{ik} I_i I_k$	$W = \frac{1}{2c^2}\sum L_{ik} I_i I_k$
Плотность тока смещения	$j_{см} = \dot{\mathbf{D}}$	$j_{см} = \frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{D}}$
Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	$\lvert\nabla\mathbf{E}\rvert = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla\mathbf{B} = 0$ $\lvert\nabla\mathbf{H}\rvert = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla\mathbf{D} = \rho$	$\lvert\nabla\mathbf{E}\rvert = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla\mathbf{B} = 0$ $\lvert\nabla\mathbf{H}\rvert = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla\mathbf{D} = 4\pi\rho$
Уравнение Максвелла в интегральной форме	$\oint_\Gamma \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}$ $\oint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0$ $\oint_\Gamma \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S} +$ $+\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}$ $\oint_S \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = \int_V \rho\, dV$	$\oint_\Gamma \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}$ $\oint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0$ $\oint_\Gamma \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S} +$ $+\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}$ $\oint_S \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = 4\pi\int_V \rho\, dV$

Предметный указатель

Игорь Владимирович САВЕЛЬЕВ

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Том 2

Электричество и магнетизм

Учебное пособие

Издание пятое, исправленное

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 05.05.11.
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 18,48. Тираж 1500 экз.

Заказ № **82.26**.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ООО «Северо-Западный Печатный двор».
188300, Ленинградская обл., г. Гатчина, ул. Железнодорожная, д. 45Б.
Тел.: (813) 714-01-81, (813) 714-01-82; факс: (813) 713-69-77.
E-mail: szpd@szpd-print.ru